

① Парадокс БертрANA

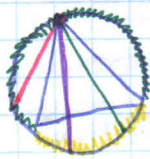
Рассмотрим равносторонний Δ , вписанный в окружность. Наудачу выбирается хорда окружности. Какова вероятность, что выбранная хорда длиннее стороны Δ ?

Проблема: вероятность не может быть легко определена, пока не определим механизм или метод выбора случайной величины.

Решение

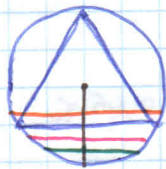
1) Метод "случайных концов"

Выбираем 2 точки, одну с Δ . $\Rightarrow \frac{1}{3}$ длины круга $\Rightarrow \frac{1}{3}$



— УСПЕХ

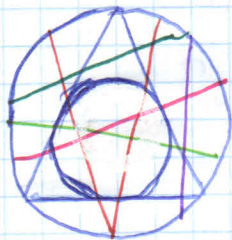
2) Метод "случайного радиуса"



Фиксируем радиус $\Rightarrow$ выбираем на нем точку, через нее $\perp$. повернем Δ так, чтобы сторона была $\perp$

$\Rightarrow \frac{1}{2}$ радиуса удобн. постановке задачи $\Rightarrow \frac{1}{2}$

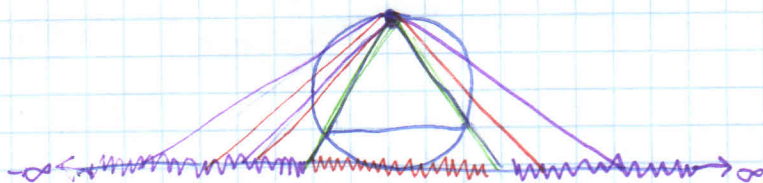
3) Метод "случайного центра"



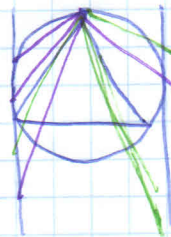
выберем произвольную точку внутри точки и проведем хорду.

$$\frac{S_{\text{вписанного}}}{S_{\text{описанного}}} = \frac{1}{4}$$

4) Можно "0"



5) Можно "1"



② Классическое определение вероятности. Задача о "Спортлото".

$N(A, n)$ - кол-во определенных событий A в n проводимых экспериментах

$$\frac{N(A, n)}{n} \rightarrow P \in [0, 1]$$

Неопределенность

Устранимая -
связанная с
недостатком
информации

Неустранимая -
(финансовый
рынок)

Случайность - НЕУСТРАНИМАЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ

- 1) Непредсказуемость
- 2) Восприимчивость
- 3) Устойчивость частот

- стохастическая
ситуация

Задача о "Спортлото"

Из 36 чисел составляется билет, путем
выбора 5 чисел. Какова вероятность, что
выиграет ваш билет?

$$C_{36}^5 = \frac{36!}{5!31!} = 376982$$

$$P(\text{выигрыш}) = \frac{1}{376982} \sim 10^{-5}$$

3

Задача об оптимальном выборе ставки

Задача: 2 игрока, поставив одинаковые суммы денег, играют в игру. В партии нужно выиграть. Сейчас 5:3. Как разделить выигрыш.

Решение:

1-выигрывает 1-й

0-выигрывает 2-й

исход:

000 $\frac{1}{8}$

001 $\frac{1}{8}$

01 $\frac{1}{4}$

1 $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$

победа 1-го $\frac{7}{8}$

победа 2-го $\frac{1}{8}$

$\Rightarrow$

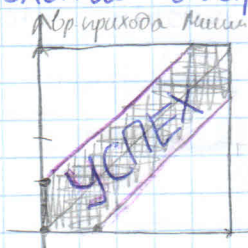
7:1

④ Геометрические вероятности. Задача о встрече.
Задача Бюффона.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}$ - множество всех подмножеств Ω для которых определена мера $\text{mes}(A)$ (площадь, длина и т.д.), тогда

$$P(A) = \frac{\text{mes}(A)}{\text{mes}(\Omega)}$$

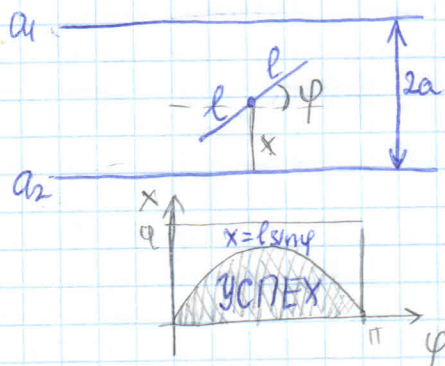
Задача о встрече:



Миша и Лина решили встретиться. Они приходят с 11⁰⁰ до 12⁰⁰ и каждый ждет 15 минут. Какова вероятность, что они встретятся?

$$P(\text{УСПЕХ}) = \frac{S(\text{УСПЕХ})}{S(\text{Всего квадрата})}$$

Задача Бюффона: 2 линии, $d(a_1, a_2) = 2a$.



Бросим игральную кость $2l < 2a$. Какова вероятность, что линия пересечет прямую?

$\varphi \in [0, \pi]$ - всевозможные симметрии
 $x \in [0, a]$
 $\Omega = [0, \pi] \times [0, a]$

Линия пересечет прямую если $x \leq l \sin \varphi$, то есть

$$M(A) = \int_0^\pi l \sin \varphi d\varphi = -l \cos \varphi \Big|_0^\pi = 2l$$

$$P(A) = \frac{2l}{a\pi}$$

5) Вероятностное пространство

- это тройка $(\Omega, \mathcal{G}, P)$

1) Ω - множество элементарных исходов

2) $\mathcal{G}$ - σ -алгебра, класс подмножеств Ω событий, обладающий следующими свойствами

1) $\Omega \in \mathcal{G}$

2) $A \in \mathcal{G} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{G}$

3) $\forall A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{G} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{G}$

3) P - непересекающаяся, нормированная, σ -аддитивная мера событий

1) $P(\Omega) = 1$

2) $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

3) $P(A) \geq 0$

~~A_i, A_j попарно несовместимы события~~

⑥ Свойства вероятности. Эквивалентности счетной аддитивности и непрерывной вероятности.

Вероятность: $\mathcal{P} \rightarrow [0, 1]$

1) $P(\Omega) = 1$

2) $\forall A \in \mathcal{B}: P(A) \geq 0$

3) $\forall A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{B} \quad P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$
 $A_i A_j = \emptyset$ несовместимы.

Свойства вероятности:

1) $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

2) $P(A) \leq P(B)$ (если $B \supset A$)

3) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

4) $P(\emptyset) = 0$

5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Эквивалентность счетной аддитивности и непрерывной вероятности: (1, 1, 1) Ширев Вероятность - 1, Москва, 2001

Теорема: P -конечно-аддитивное, удовлетворяющее утв. эквивалентности:

1) P δ -аддитивное

2) P непрерывно сверху, т.е. $\forall A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}: A_n \subseteq A_{n+1}, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

$\lim_n P(A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$

3) P непрерывно снизу, т.е. $\forall A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}: A_n \supseteq A_{n+1}, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

$\lim_n P(A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$

4) P непрерывно в "нуле" т.е. $\forall A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}: A_n \supseteq A_{n+1}, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$

$\lim_n P(A_n) = 0$

③ $\Rightarrow$ ③' $\forall n \geq 1 \quad A_1, \dots, A_n: A_i A_j = \emptyset \Rightarrow P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$

④ $A_1, A_2, \dots, A_i \in \mathcal{A} \quad A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$ непрерывность

{3', 4} $\Rightarrow$ {3}

$B_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad B_2 = \bigcup_{i=2}^{\infty} A_i \quad \dots \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \emptyset$
 $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots$

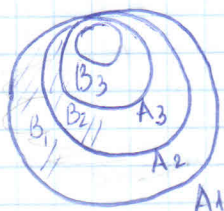
$P(B_1) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + P(B_{n+1})$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^n P(A_i) + P(B_{n+1}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(A_i) + \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_{n+1}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(B_{n+1}) = 0$

{3', 4} $\in$ {3} $B_1 = A_1 \setminus A_2; B_2 = A_2 \setminus A_3; \dots \quad B_i B_j = \emptyset$

$P(A_1) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) + P(A_{n+1})$
 $\Rightarrow P(A_1) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)$
 что



④ Условные вероятности

Условная вероятность события A при условии B
называется $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P_B(A)$

$P_B(A)$ удовлетворяет всем свойствам вероятности

1) $P_B^*(A) : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ $P_B^*(A) = P(AB)$ - нехорошо
т.к. $P_B^*(\Omega) = P(B) < 1$

правильно умножение: $P(AB) = P(B) P(A|B)$

A, B - независимы, если $P(A|B) = P(A) P(B)$

$A_1, \dots, A_n$ ($n \geq 1$) независимы в совокупности, если
 $\forall k=1, \dots, n$ и $\forall 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$

$$P\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j})$$

Пример: тетраэдр Бернулли



$P(K) = P(C) = P(B) = \frac{1}{2}$

$P(K \cap C) = \frac{1}{4} = P(K) \cdot P(C)$

$P(K \cap C \cap B) = \frac{1}{4} \neq P(K) P(C) P(B)$

8

Формула полной вероятности

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$B_1, B_2, \dots$ образуют полную группу событий если
 1) $P(B_i) > 0 \quad i \geq 1$ — априорные вероятности

2) $B_i \cap B_j = \emptyset \quad (i \neq j)$

3) $\cup B_i = \Omega$

$$A = \cup_i (A \cap B_i)$$

$$(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = \emptyset$$

$$P(A) = \sum_i P(A \cap B_i) = \sum_i P(B_i) P(A|B_i)$$

что

Пример:

40 деталей: 10 изготовлены в 1-м цехе
 25 во втором
 5 в третьем
 Какова вероятность того, что деталь будет хорошей?

Рхорошо

0,9

0,7

0,9

A — выбрана хорошая деталь

H_i — выбрана деталь i -го цеха

$$P(H_1) = \frac{1}{4} \quad P(H_2) = \frac{5}{8} \quad P(H_3) = \frac{1}{8}$$

$$P(A|H_1) = P(A|H_3) = 0,9$$

$$P(A|H_2) = 0,7$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(H_i) P(A|H_i) = \frac{1}{4} \cdot 0,9 + 0,7 \cdot \frac{5}{8} + 0,9 \cdot \frac{1}{8} = 0,775$$

9

Формула Байеса. Задача о детекторе лжи.

$$P(B_i | A) = \frac{P(A|B_i) P(B_i)}{\sum_j P(A|B_j) P(B_j)} - \text{априорные}$$

Z - диагноз
Y - на самом деле.

$$P(Z = \text{ложь} | Y = \text{ложь}) = 0,99$$

$$P(Z = \text{ложь} | Y = \text{правда}) = 0,01$$

$$P(Y = \text{ложь}) = 0,01$$

$$P(Y = \text{ложь} | Z = \text{ложь}) = \frac{P(Z = \text{ложь} | Y = \text{ложь}) P(Y = \text{ложь})}{P(Z = \text{ложь} | Y = \text{ложь}) P(Y = \text{ложь}) + P(Z = \text{ложь} | Y = \text{правда}) P(Y = \text{правда})} = \frac{1}{2}$$

$$P(Z = \text{ложь} | Y = \text{ложь}) = 0,99$$

$$P(Z = \text{ложь} | Y = \text{правда}) = 0,01$$

$$P(Y = \text{ложь}) = 0,01$$

$$P(Y = \text{ложь} | Z = \text{ложь}) = \frac{P(Y = \text{ложь}) \cdot P(Z = \text{ложь} | Y = \text{ложь})}{P(Y = \text{ложь}) \cdot P(Z = \text{ложь} | Y = \text{ложь}) +$$

$$+ P(Y = \text{правда}) P(Z = \text{ложь} | Y = \text{правда})} = \frac{0,01 \cdot 0,99}{0,01 \cdot 0,99 + 0,99 \cdot 0,01} = \frac{1}{2}$$

10) Определение сигма-алгебры.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$\exists$ отображение $\omega \in \Omega \rightarrow \xi(\omega)$
 K -некоторый класс подмножеств множества Ω .

σ -алгебра, $\sigma(K)$ - сигма-алгебра, порожденная классом K ,
 если эта сигма-алгебра содержит класс K и
 среди всех σ -алгебр, содержащих K , является минимальной.

Бариевой σ -алг. вып. прямой нуль-единицы σ -алг.
 содержащая все интервалы вида $I = \{(\alpha, \beta), \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$ $\mathcal{B} = \sigma(I)$

Отображение $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ - сигма-алгебра, если
 $\forall B \in \mathcal{B} \quad \xi^{-1}(B) = \{\omega: \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow \mathcal{A}$ - σ -алгебра

Утв. 1 $\mathcal{E}$ - система подмножеств Ω :
 $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}$

Д-во: $\xi(\omega)$ - с.б. $\Leftrightarrow \forall E \in \mathcal{E} \quad \{\omega: \xi(\omega) \in E\} \in \mathcal{A}$

необходимость очевидно

достаточность

$\mathcal{D} = \{D: D \in \mathcal{B}, \xi^{-1}(D) \in \mathcal{A}\}$ - σ -алгебра т.к.

$$\xi^{-1}\left(\bigcup_{\alpha} B_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha} \xi^{-1}(B_{\alpha})$$

$$\xi^{-1}\left(\bigcap_{\alpha} B_{\alpha}\right) = \bigcap_{\alpha} \xi^{-1}(B_{\alpha})$$

$$\overline{\xi^{-1}(B_{\alpha})} = \xi^{-1}(B_{\alpha})$$

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$$

$$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{D}) = \mathcal{D} \subseteq \sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{D} = \mathcal{B}$$

что

с. 1 $\xi(\omega)$ - с.б. $\forall x \in \mathbb{R}$ мн-во $\{\omega: \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$
 $(-\infty, x)$ - порождает Бариевское мн-во

Утв. 2 $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ - расширенная прямая
 расширенная сигма-алгебра,
 $\xi: \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \quad \forall B: \xi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$

1) Д-во $\forall \omega \in \Omega \quad \exists \{\xi_n(\omega)\}_{n \geq 1}: |\xi_n| \leq |\xi|$
 $\xi_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$

2) $\xi_1(\omega) \geq 0 \quad \exists \{\xi_n(\omega)\}_{n \geq 1}: \xi_n(\omega) \uparrow \xi(\omega) \quad (n \rightarrow \infty) \quad \forall \omega \in \Omega$

Д-во: $n = 1, 2, \dots$

$$\xi_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n \cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{1}_{\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)} \leq \xi(\omega) < \frac{k}{2^n} (\omega) + n \cdot \mathbb{1}_{\{\xi(\omega) \geq n\}}(\omega)$$

что

11

Замкнутость случайных величин относительно операций минимума, максимума и предельного перехода.

Утверждение: $\xi_1, \xi_2, \dots$ - с.в.

$$\left. \begin{array}{l} \sup \xi_n \\ \inf \xi_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \end{array} \right\} \text{случайные величины}$$

Д-во: $\{\omega: \sup \xi_n(\omega) > x\} = \bigcup_n \{\omega: \xi_n(\omega) > x\}$

$$\{\omega: \inf \xi_n < x\} = \bigcup_n \{\omega: \xi_n(\omega) < x\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \inf_n \sup_{m \geq n} \xi_m(\omega)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \sup_n \inf_{m \geq n} \xi_m(\omega)$$

чтд.

Утверждение: $\xi_1, \xi_2, \dots$ - $f(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$ - с.в.

Д-во: $\{\omega: f(\omega) < x\} = \{\omega: \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) < x\} =$

$$= \{\omega: \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) < x\} = \bigcup_n \{\omega: \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) < x\} =$$

$$= \bigcup_n \{\omega: \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$$

чтд

(12) Замкнутость аналогов относительно арифметических операций

$$\left. \begin{array}{l} g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \forall B \in \mathcal{B} \\ g^{-1}(B) \in \mathcal{B} \end{array} \right\} g - \text{Борелевские функции}$$

Утв $\xi - \text{с.в.} \Rightarrow \eta = g(\xi) - \text{с.в.}$ (g - Борелевские)

Д.б. $\forall B \quad \eta^{-1}(B) = \{\omega: \eta(\omega) \in B\} = \{\omega: g(\xi(\omega)) \in B\} =$
 $= \{\omega: \xi(\omega) \in \underbrace{g^{-1}(B)}_{\in \mathcal{B}}\} \in \mathcal{A} \quad \text{что}$

Все непрерывные - Борелевские

Утв $\xi, \eta - \text{с.в.}$ (возможно расширенные)

1) $\xi \pm \eta - \text{с.в.}$

2) $\xi \cdot \eta - \text{с.в.}$

3) $\xi/\eta - \text{с.в.}$

Д.б. $\begin{array}{l} \xi_n \rightarrow \xi \\ \eta_n \rightarrow \eta \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \xi_n + \eta_n \rightarrow \xi + \eta \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \eta_n = \xi \eta \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{с.в.} \\ \text{с.в.} \end{array} \quad \text{что}$

(13)

Функции распределения. Простейшие свойства.

Опр $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_f)$ - вероятностное пространство, индуцированное случайной величиной f .

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad P_f(B) = P(f^{-1}(B))$$

$$F_f(x) = P(\{\omega: f(\omega) \leq x\}) = P_f((-\infty, x]) \quad - \text{ф. ун. распределения.}$$

Свойства:

$$① \quad x < y \Rightarrow F_f(x) \leq F_f(y)$$

$$\begin{aligned} F_f(y) &= P_f((-\infty, y]) = P_f((-\infty, x] \cup [x, y]) = \\ &= P_f((-\infty, x]) + P_f([x, y]) = F_f(x) + \underbrace{P_f([x, y])}_0 \end{aligned}$$

$$② \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F_f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F_f(x) = 1$$

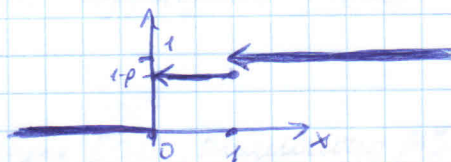
$$x_n \searrow -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_f((-\infty, x_n]) = 0 \quad (\text{вложение})$$

$$③ \quad F_f(x) \text{ непрерывно слева}$$

$$x_n \nearrow x \quad \bigcap_{n} [x_n, x) = \emptyset$$

Пример: $f = \begin{cases} 0 & 1-p \\ 1 & p \end{cases} \quad p \in (0,1)$



$$F_f(x) = P(f \leq x) = P(\{\omega: f(\omega) \leq x\})$$

Пример (ЗАБАВНОСТЬ): f - с.в. $F_f(x)$ - ее ф. ун. распределения
 $\eta = F_f(f)$

$$F_\eta(x) = P(\eta \leq x) = P(F_f(f) \leq x) = P(f \leq F_f^{-1}(x)) = F_f(F_f^{-1}(x)) = x \quad \text{ч.т.д.}$$

Пример (еще одна забавность): Лестница Кантора



14) Понятие меры Лебега

$\mathcal{A}$ - класс подмножеств $[0,1]$ наз-ся алгеброй, если:

- 1) $[0,1] \in \mathcal{A}$
- 2) $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$
- 3) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

$$A = \bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i) \quad \begin{matrix} a_{i+1} > b_i \\ \text{и } ([-\text{мд}, \text{если } b_i = 1, 10)) \end{matrix}$$

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

св-ва: 1) неотрицательность

$$\mu([0,1]) = 1$$

$$3) A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

4)

4) Счетно-аддитивность:

Если $A_1, A_2, \dots$

$$1) A_i \in \mathcal{A}$$

$$2) A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

$$3) \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Теорема (Каратеодори):

$\mathcal{A}$ - алгебра, содержащая все интервалы $[0,1]$

Рассмотрим $\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \mathcal{B}_{[0,1]}$

Пусть на $\mathcal{A}$ задана $\mu(A)$ удовлетворяющая выше.

$\exists$ мера μ^* на $\mathcal{B}$ т.е. μ^* - счетно-аддитивная ф-ция
и $\forall A \in \mathcal{A} \quad \mu(A) = \mu^*(A)$

2-во:

μ^* - мера Лебега

μ_0^* - мера Лебега на отрезке $[0,1]$, аналогично μ_1^* на $[1,2]$

$\{\mu_n^*\}$ на $[n, n+1]$

$$(\mathbb{R}, \mathcal{B}) \quad A \in \mathcal{B} \quad \mu^*(A) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n^*(A \cap [n, n+1))$$

- мера Лебега

$(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \{f_n\} \quad f_n \rightarrow f \geq 0 \quad f^+ = \max(f, 0) \quad f^- = \min(f, 0) \quad f = f^+ - f^-$$

$$f_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{1}_{\left\{\frac{k-1}{2^n} \leq f(\omega) \leq \frac{k}{2^n}\right\}}(\omega) + n \mathbb{1}_{\{f(\omega) > n\}}(\omega)$$

Рассмотрим $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu^*)$

$$\forall B \in \mathcal{B} \quad f^{-1}(B) = \{\omega: f(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \{ \omega: f(\omega) < x \} \in \mathcal{A}$$

$$(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu^*) \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall x \quad \{y: f(y) < x\} \in \mathcal{B}$$

Функцией f - функции $\exists$ посыл-то функции, 2-во аналогично

(15)

Понятие интеграла Лебега

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall x \{ y : f(y) < x \} \in \mathcal{B}$$

$$\forall \text{ измеримой функции } f \exists \{f_n\} \text{ т.ч. } f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$$

$$f \text{ на } [0,1) \quad f \text{ - измерима} \quad f: [0,1) \Rightarrow \mathbb{R}$$

f - простые (функции, которые принимают конечное число значений) и принимают значения $y_1, \dots, y_k$

$$\int_0^1 f(x) \mu^*(dx) = \sum_{i=1}^k y_i \cdot \mu^*(\{x : f(x) = y_i\})$$

↑
интеграл Лебега

$$f \geq 0 \text{ - монотонно, измерима, } \exists f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \text{ монотонно.}$$

$$\int_0^1 f(x) \mu^*(dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) \mu^*(dx)$$

$$f^-(x) = -\min(f(x), 0)$$

$$f^+(x) = \max(f(x), 0)$$

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

$$\int_0^1 f(x) \mu^*(dx) = \int_0^1 f^+(x) \mu^*(dx) - \int_0^1 f^-(x) \mu^*(dx)$$

$$|f| = f^+ + f^-$$

$$f \text{ - интегрируема по Лебегу} \Leftrightarrow |f| \text{ - интегр. по Лебегу}$$

$$\int f(x) \mu^*(dx) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(x) \mu^*(dx)$$

$$\text{Если } f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{интегр. по Лебегу}$$

Но она лучше: интеграл Дюпюэна

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{управ. на } [0,1) \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

16

Классификация случайных величин. Дискретные случайные величины.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$F_Z(x)$ - ф-ция распределения

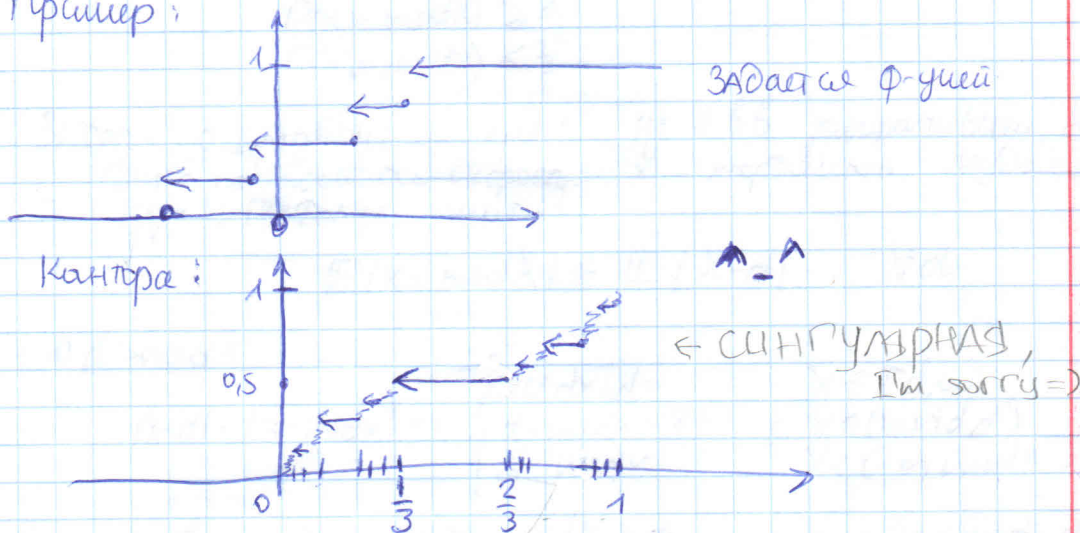
св-ва:

1) $x < y \Rightarrow F_Z(x) \leq F_Z(y)$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_Z(x) = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} F_Z(x) = 1$

3) $F_Z(x)$ неуб-но слева

Пример:



Мно-во точек - конечно или бесконечно, но $\forall x$ стр-но.

17

Классификация случайных величин. Абсолютно непрерывные случайные величины.

$F_Z(x)$ - ф-ция распределения абсолютно непрерывной сл. величины, если $\exists f \geq 0: \forall x$

$$F_Z(x) = \int_{-\infty}^x f(y) \mu^*(dy) \equiv \int_{-\infty}^x f(y) dy.$$

$f(y)$ - плотность

$$f(x) = F'(x) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

$$\int_A f(x) \mu^*(dx) = \int f(x) 1_A(x) \mu^*(dx)$$

18

Классификация случайных величин. Сингулярные случайные величины.

Опр x_0 - точка роста, если $F_Z(x_0 + \varepsilon) - F_Z(x_0 - \varepsilon) > 0$.
Непрерывная функция распределения, имеющая точки роста, которая имеет лебегову норму нуль называется сингулярной.

Теорема Лебега: $\forall F(x) \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3: \alpha_i \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$
 $F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + \alpha_3 F_3(x)$
 дискрет. непр сингулярная

19) МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ. Простейшие свойства.

ЗАДАЧА О ПЕНСИОНЕРЕ.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - вер. пр. во

$\xi = \xi(\omega)$ - сл. величина, принимающая конечные значения

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \notin A \end{cases}$$

$$\xi = \xi(\omega) = \sum_{i=1}^k x_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega) \text{ - конечная}$$

Опр. Случайная величина ξ -простая, если

$$\xi = \sum_{i=1}^k x_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega) \quad \cup A_i = \Omega$$

Опр.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ, простое сл. величина $\xi = \xi(\omega) = \sum_{i=1}^k x_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega)$ наз-ся числом $E\xi = \sum_{i=1}^k x_i P(A_i) = \sum_{i=1}^k x_i P_i(x_i)$

Сб-ва:

1) $\xi \geq 0 \Rightarrow E\xi \geq 0$

до-во: очевидно

2) $Ea\xi = a E\xi, a = \text{const}$

до-во: $E\xi = \sum_{i=1}^k a x_i P(A_i) = a \sum_{i=1}^k x_i P(A_i)$

3) $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$

до-во: $E(\xi + \eta) = E \sum_{i,j} (x_i + y_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}(\omega) = \sum_{i,j} (x_i + y_j) P(A_i \cap B_j) = \sum_i x_i P(A_i) + \sum_j y_j P(B_j)$

4) $|E\xi| \leq E|\xi|$

$|E\xi| = |\sum x_i P(A_i)| \leq \sum |x_i| P(A_i) = E|\xi|$

5) $\xi \leq \eta \Rightarrow E\xi \leq E\eta$

до-во: 1)+3) $\eta - \xi \geq 0 \Rightarrow E(\eta - \xi) \geq 0 \Rightarrow E\eta \geq E\xi$

6) ξ, η - независимые $\Rightarrow E\xi\eta = E\xi \cdot E\eta$

$E\xi\eta = E(\sum_i x_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega)) (\sum_j y_j \mathbb{1}_{B_j}(\omega)) = E[\sum_{i,j} x_i y_j \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}(\omega)] = \sum_{i,j} x_i y_j P(A_i \cap B_j) = \sum_i x_i P(A_i) \sum_j y_j P(B_j)$

7) $\xi = \mathbb{1}_A(\omega) \Rightarrow E\xi = P(A)$

до-во: очевидно

8) Пер-во Коши Буняковского

$$E\xi\eta \leq \sqrt{E\xi^2} \sqrt{E\eta^2}$$

$\varphi(\xi) = \xi^2 : E\varphi(\xi) = \sum x_i^2 P(A_i) > 0$
 $E\varphi(\eta) = \sum y_j^2 P(B_j) > 0$

$\xi = \frac{\xi}{\sqrt{E\xi^2}} \cdot \sqrt{E\xi^2} \quad \eta = \frac{\eta}{\sqrt{E\eta^2}} \cdot \sqrt{E\eta^2} \Rightarrow (\xi - \eta)^2 \geq 0$

$\Rightarrow \xi^2 - 2\xi\eta + \eta^2 \geq 0 \Rightarrow 2\xi\eta \leq \xi^2 + \eta^2 \Rightarrow 2E\xi\eta \leq \frac{E\xi^2 + E\eta^2}{2} = 2 \Rightarrow |E\xi\eta| \leq 1 \Rightarrow$

Опр. Математическим ожиданием неотрицательной случайной величины $\mathbb{E}\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\xi_n$, где $\xi_n \rightarrow \xi$

$\xi = \xi(\omega)$ - произвольная с.в

$$\xi^+ = \max(\xi, 0) \quad \xi^- = -\min(\xi, 0)$$

$$\xi = \xi^+ - \xi^-$$

Опр. Математическое $\mathbb{E}\xi$ существует, если $\exists \mathbb{E}\xi^+$ или $\mathbb{E}\xi^-$ конечно, тогда $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\xi^+ - \mathbb{E}\xi^-$

Опр. Математическое количество, если

$$\mathbb{E}\xi^+ < \infty$$

$$\mathbb{E}\xi^- < \infty$$

$$|\xi| = \xi^+ + \xi^- \quad \xi \leq |\xi|$$

$$\mathbb{E}|\xi| < \infty$$

$$\mathbb{E}\xi + \mathbb{E}|\xi| < \infty$$

$$\mathbb{E}\xi = \int_{\Omega} \xi dP;$$

$$\text{Мат. ожидание: } \Delta: \mathbb{E}\xi = \sum_k x_k p_k = \sum_k x_k P(\xi = x_k)$$

$$\text{И: } \mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$$

ЗАДАЧА ОПЕНСИОНЕРЕ: ???

Пенсионер на протяжении жизни тратит a в год, а в год b зарабатывает $(b-a)^2$ утилиты. X - случайная величина, характеризующая точку, куда ему надо уйти, где он должен жить, чтобы минимизировать свои ожидаемые утраты.

X -ые расходы

$$\mathbb{E}(X-x)^2 = \mathbb{E}(X^2 - 2xX + x^2) = x^2 - 2x\mathbb{E}X + \mathbb{E}X^2$$

минимум $x_0 = \mathbb{E}X$

20 Медиана. Простейшие свойства. Задача о предпринимателе.

Опр. $q \in (0,1)$ Квантиль порядка q с.в.х
наз-ся число x_q :

$$P(X \leq x_q) \geq q \text{ и } P(X > x_q) \leq 1-q$$

Опр Медиана - квантиль порядка $\frac{1}{2}$.

$$P(X \leq \text{med} X) \geq \frac{1}{2}$$

$$P(X > \text{med} X) \leq \frac{1}{2}$$

Задача о предпринимателе: у а в в разрабатываем в-а/
у него постоянная скорость. X - координата, куда он
идет. Показан путь?

$$E|X - \text{med} X| \leq E|X - d| \quad \forall d$$

1) $d > \text{med} X$

$$|X - d| - |X - \text{med} X| = \begin{cases} \text{med} X - d & X \in [d, \infty) \\ d + \text{med} X - 2X & X \in (\text{med} X, d) \\ d - \text{med} X & X \in (-\infty, \text{med} X] \end{cases}$$

$d + \text{med} X - 2X > \text{med} X - d$ при $\text{med} X < X < d \Rightarrow$

$$E|X - d| - E|X - \text{med} X| = E[|X - d| - |X - \text{med} X|] \geq$$

$$\geq (\text{med} X - d) E 1_{[d, \infty)}(X) + (\text{med} X - d) E 1_{(\text{med} X, d)}(X)$$

$$+ (d - \text{med} X) E 1_{(-\infty, \text{med} X]}(X) =$$

$$= (\text{med} X - d) P(X \geq d) + (\text{med} X - d) P(\text{med} X < X < d) +$$

$$+ (d - \text{med} X) P(X \leq \text{med} X) =$$

$$= (d - \text{med} X) [P(X \leq \text{med} X) - P(X > \text{med} X)] \geq 0$$

2) $d < \text{med} X$

аналогично
т.д.

(21) ЗАДАЧА О СРЕДНЕМ ГОДОВОМ ДОХОДЕ.

Опр. Модой непрерывной с.в. X с п.р.в. $f(x)$ на-се число $\text{mod } X$: $f(x) \leq f(\text{mod } X)$
 $\forall x$.

Опр. Модой дискретной с.в. X со значений $x_1, x_2, \dots$ на-се число x_k : $P(X=x_k) \geq P(X=x_{k_0})$

Задача: вероятность, что среднегодовой доход получателя выбранного предприятия превышает $X = 2^x$
 $0 < 2 < 1$. Каков среднегодовой доход страны?

X -среднегодовой доход получателя
 $F(x) = P(X \leq x) = 1 - 2^{-x} \Rightarrow f(x) = C \cdot 2^{-x}; C > 0$

$$C \int_0^{\infty} x 2^{-x} dx = 1 \text{ по ус.} \Rightarrow C = \ln \frac{1}{2}$$

$$\text{Медиана: } 1 - 2^{-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{mod } X = \log_2 \frac{1}{2}$$

$$\exists \text{ т.ч. } f(x) = C 2^{-x}, \text{ где } f(x) \rightarrow \text{модуль максимума}$$
$$\text{mod } X = 0;$$

(22)

Дисперсия, простейшие свойства

Опр

Дисперсия сл. в. ξ $D\xi = E(\xi - E\xi)^2 =$

$$= E(\xi^2 - 2\xi E\xi + (E\xi)^2) = E\xi^2 - 2E\xi E\xi + (E\xi)^2 =$$

$$= E\xi^2 - (E\xi)^2$$

Сб ва:

1) $D\xi \geq 0$

2) $D\text{const} = 0$

3) $Dc\xi = c^2 D\xi$

4) $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$ (ξ, η - н.с.в.)

5) $D(\xi + c) = D\xi$

6) $D\xi = 0 \Leftrightarrow \exists a \text{ } P(\xi = a) = 1$

7) $\sigma = \sqrt{D\xi}$ - мера разброса

(23)

Ковариация. Коэффициент корреляции.

Опр. $\text{cov}(\xi, \eta) = E((\xi - E\xi)(\eta - E\eta)) = E\xi\eta - E\xi E\eta$

Спр. $\text{cor}(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi} \sqrt{D\eta}}$

$|\text{cor}(\xi, \eta)| \leq 1$ (из неравенства Коши-Буняковского).

Если ξ и η — независимы, то $\text{cor}(\xi, \eta) = 0$

$\text{cor}(\xi_1 + \xi_2, \eta) = \text{cor}(\xi_1, \eta) + \text{cor}(\xi_2, \eta)$

$\text{cor}(c \cdot \xi, \eta) = c \cdot \text{cor}(\xi, \eta)$

1) $\text{cov} > 0$ ξ увеличивается η увеличивается в ту же сторону
от своего математического ожидания

2) $\text{cor} = 1$ — л.з.

3) $\text{cor} \rightarrow 1$ морально приближается к зависимости
но не совсем

(24)

Неравенство Маркова и Чебышева.

1) Нер-во Маркова:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(\xi > \varepsilon) \leq \frac{E\xi}{\varepsilon} \quad \checkmark$$

Будем

вводить:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad E\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega) = \int_{\xi(\omega) > \varepsilon} \xi(\omega) P(d\omega) + \int_{\xi(\omega) \leq \varepsilon} \xi(\omega) P(d\omega) \geq$$

$$\geq \int_{\xi(\omega) > \varepsilon} \varepsilon \cdot P(d\omega) = \varepsilon P(\xi > \varepsilon) \quad \text{что}$$

 $\xi \geq \varepsilon \cdot \mathbb{I}_{\{\xi > \varepsilon\}}$

Кусочки!

$$\exists D\xi \quad P(|\xi - E\xi| > \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2} \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\eta = (\xi - E\xi)^2 \quad \varepsilon_1 = \varepsilon^2$$

Тогда η и ε_1 - нер-во Маркова.

$$P(|\xi - E\xi|^2 > \varepsilon^2) \leq \frac{E(\xi - E\xi)^2}{\varepsilon^2} \quad \text{что}$$

(25)

Неравенство Гаусса, "Правило 3-х сигм"

Самодостаточность,
НЕ
ННД
ЭТОЗ

 $X \sim N(m, \sigma^2)$:

$$P(|X - m| < 3\sigma) = P(-3\sigma < X - m < 3\sigma) =$$

$$= \Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 0.997$$

Неравенство Гаусса:

 f - афф. непрерывна и унимодальна (имеет только одну моду) $f(x)$ - плотность $f \Rightarrow \exists \gamma: f(x) \uparrow x \leq \gamma, f(x) \downarrow x > \gamma$

$$E\xi^2 < \infty: \quad \sigma^2 = E(\xi - \mu)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 g(z) dz \Rightarrow P(|\xi - \mu| \geq r) < \frac{4}{9} \frac{\sigma^2}{r^2}$$

Д-во $Z = |\xi - \mu|$ плотность $g(x)$. $G(x) = P(Z \leq x) = P(\mu - x \leq \xi \leq \mu + x)$

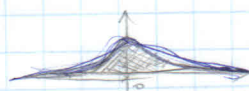
$$g(r) \int_0^r z^2 dz = \underbrace{g(r) \int_0^r z^2 dz}_{I_1} + \underbrace{\int_r^s z^2 [g(r) - g(z)] dz}_{I_2} + \underbrace{\int_s^r g(z) z^2 dz}_{I_3}$$

$$I_1 \leq \int_0^r z^2 g(z) dz; \quad g(r) - g(z) \geq 0 \quad \forall z \in (r, s) \Rightarrow I_2 \leq s^2 \int_r^s [g(r) - g(z)] dz =$$

$$= s^2 g(r) \int_r^s dz - s^2 \int_r^s g(z) dz = s^2 (g(r)(s-r) - \int_r^s g(z) dz) \leq s^2 (\int_r^s g(z) dz - \int_r^s g(z) dz)$$

$$= s^2 (\int_r^s g(z) dz) \leq \int_r^s z^2 g(z) dz$$

$$\Rightarrow I_1 + I_2 + I_3 \leq \sigma^2$$

Правило 3-х сигм: X - симметричное разпр. $\Rightarrow P(|X - EX| \leq 3\sigma) \geq \frac{77}{81} > 0.995$

26) Закон больших чисел в форме Чебышева.

$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ - н.о.р. с.в.

$\xi_1 = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & 1-p \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \approx p \right) \rightarrow p$

пер-во Чебышева.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P} \left(\left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \mathbb{E} X_1}{n} \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{D} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n^2} \mathbb{D} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{\varepsilon^2 n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{D} X_i = \frac{n \cdot \mathbb{D} X_1}{\varepsilon^2 n^2} = \frac{\mathbb{D} X_1}{\varepsilon^2 n} \rightarrow 0$$

27) Неравенство Йенсена и Лемма Йенсена:

$g(x)$ - выпуклая вниз $\Rightarrow \mathbb{E} g(\xi) \geq g(\mathbb{E} \xi)$

$\exists g'' \quad g''(x) \geq 0$

$g(\xi) \geq g(a) + g'(a)(\xi - a) \quad 1) a = \mathbb{E} \xi \quad 2) \mathbb{E}$ от вып.

$\mathbb{E} g(\xi) \geq g(\mathbb{E} \xi) + 0?$

$g(\xi) \geq g(a) + C(\xi - a) \quad \exists C, \text{ т.к. } g \text{ выпуклая вниз}$

Нынешнее
вопрос

Лемма Йенсена: $\mathbb{E} |x - \mathbb{E} x| \leq \sqrt{\mathbb{D} x}$

$x = x - \mathbb{E} x, \quad f(x) = x^2 \Rightarrow$ следствие Йенсена

$|\mathbb{E} (x - \text{mod}(x))| \leq \mathbb{E} |x - \text{mod}(x)| \leq \mathbb{E} |x - \mathbb{E} x| \leq \sqrt{\mathbb{D} x}$

$\arg \min_a \mathbb{E} |x - a| = \text{mod } x$

2008:

$$(\mathbb{E} |\xi|^p)^{\frac{1}{p}} \geq (\mathbb{E} |\xi|^2)^{\frac{1}{2}} \quad p > 2.$$

(28)

Коэффициенты эксцесса и асимметрии

Рассмотрим $\bar{X} = \frac{X - EX}{\sqrt{DX}}$. $EX = 0$
 $DX = EX^2 = 1$

Если DX - константа

Дип Пусть $\exists EX^3$ $X_3 = EX^3 = E\left(\frac{X - EX}{\sqrt{DX}}\right)^3 =$
 коэффициент асимметрии с.в. X

Если $X_3 < 0$, то левый "хвост" распределения тяжелее правого $X_3 > 0$, то левый "хвост" легче правого $X_3 = 0$ если хвосты совпадают.

Дип Пусть $\exists EX^4$. $X_4 = EX^4 = E\left(\frac{X - EX}{\sqrt{DX}}\right)^4 = \frac{EX^4 - 4EX^3EX + 6EX^2(EX)^2 - 4EX(EX)^3 + (EX)^4}{(DX)^2}$

- коэффициент эксцесса или островершинности X .Чем больше X_4 , тем больше вершинность
плотности X .

X_4 (если $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$) = 3

(29)

Схема испытаний Бернулли. Биномиальное распределение.

Успех
Не успех

p
 $1-p$

ξ - кол-во испытаний до реализации первого У.

Геометрическое

это тоже

НЕ НАДО

это 37

билет

НЕ

НАДО!!!

это 38

билет

$$P(\xi = k) = (1-p)^{k-1} p, \quad k=1, 2, \dots$$

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k P(\xi = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k p (1-p)^{k-1} = -p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{dp} (1-p)^k =$$

$$= -p \frac{1}{dp} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k = -p \frac{d}{dp} \left(\frac{1-p}{p} \right) = -p \frac{-1+p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$D\xi = \frac{1-p}{p^2}$$

Теорема (Реньи): $\lim_{p \rightarrow 0} P\left(\frac{\xi}{E\xi} \geq x\right) = \lim_{p \rightarrow 0} P\left(\xi \geq \frac{x}{p}\right) =$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{k=\lceil \frac{x}{p} \rceil}^{\infty} p (1-p)^k = \lim_{p \rightarrow 0} (1-p)^{\lceil \frac{x}{p} \rceil} = \lim_{\frac{x}{p} \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{\frac{x}{p}}\right)^{\lceil \frac{x}{p} \rceil} = e^{-x}$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} P\left(\frac{\xi}{E\xi} < x\right) = 1 - e^{-x}$$

Биномиальное

$$X_i = \begin{cases} \text{Успех } p \\ \text{Не успех } 1-p \end{cases}$$

y - кол-во успехов
 $y = \sum_{i=1}^n X_i \Rightarrow y \sim B(n, p)$

$$P(y = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$E y = np$$

$$D y = np(1-p)$$

(30)

Теорема Пуассона. Распределение Пуассона.
Задача о бутылке.

Теорема Пуассона: $Bi(n, p) : \begin{cases} n \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0 \\ p \cdot n \rightarrow \lambda > 0 \end{cases}$

$$\lim_A P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \left(\frac{n!}{(n-k)!}\right) \cdot \frac{1}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\left(\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}\right)}_{\rightarrow 1} =$$

$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad - \text{Распределение Пуассона.}$$

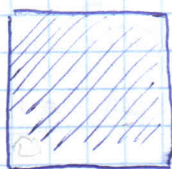
$$E\left(e^{\lambda \frac{\lambda^k}{k!}}\right) = 1$$

$$D\left(e^{\lambda \frac{\lambda^k}{k!}}\right) = \lambda$$

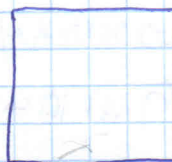
Задача: в одной бутылке - бутылочка по ГОСТу. Какова вероятность, что бутылке не будет цыпочек?

Закон малых чисел: λ - среднее значение. $\xi \sim \text{Pois}(\lambda)$
 $\Rightarrow e^{-5}$

31. Задача об инсектициде



поле с
инсектицидом



чистое
поле

n_1 - число жуков

n_2 - число жуков

$$n_1 \leq n_2$$

N_1 - реализация сущ. вел. n_1
 N_2 - реализация сущ. вел. n_2

Разбиваем поле на большое число
маленьких их частей так, что в каждой
м.б. только 1 жук

$$N_1 \sim \text{Pois}(\lambda_1)$$

$$N_2 \sim \text{Pois}(\lambda_2)$$

Можно сравнить λ_1 и λ_2 :

Если $\lambda_1 < \lambda_2$, то инсектицид действует,
если $\lambda_1 = \lambda_2$ не действует.

$$n = n_1 + n_2$$

$$\begin{aligned} P(N_1=k \mid N_1+N_2=n) &= \frac{P(N_1=k, N_1+N_2=n)}{P(N_1+N_2=n)} = \\ &= \frac{P(N_1=k, N_2=n-k)}{P(N_1+N_2=n)} = \frac{P(N_1=k) P(N_2=n-k)}{P(N_1+N_2=n)} \quad (\text{независимости}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(N_1+N_2=n) &= \sum_{i=0}^n P(N_1=i, N_2=n-i) = \sum_{i=0}^n P(N_1=i) P(N_2=n-i) \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{e^{-\lambda_1} \lambda_1^i}{i!} \frac{e^{-\lambda_2} \lambda_2^{n-i}}{(n-i)!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \lambda_1^i \lambda_2^{n-i} = \\ &= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-\lambda_1} \lambda_1^k e^{-\lambda_2} \lambda_2^{n-k}}{k! (n-k)! (\lambda_1+\lambda_2)^n e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}} = C_n^k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \right)^k \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \right)^{n-k}$$

$$N_1 \mid N_1+N_2=n \sim B_i \left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \right)$$

предположим, что $\lambda_1 = \lambda_2$: $N_1 \mid N_1+N_2=n \sim B_i \left(n, \frac{1}{2} \right)$

$$P_0(N_1 \leq n_1 \mid N_1+N_2=n) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n_1} C_n^k < \varepsilon$$

Если вер-ть мала, то Нокверна.

Если не мала, ничего сказать не можем.

(32) Теорема Муавра-Лапласа. Задача ОДОКТОРЕ
Сноке (который написал мат. по м. младенца)

Теорема Муавра-Лапласа: $\xi \sim Bi(n, p)$; $\delta = \sqrt{npq}$; $q = 1-p$

$$G \rightarrow \infty \quad \forall x > 0 \quad |x| \leq \frac{m - np}{\delta} \quad x = \frac{m - np}{\delta} \quad m - np \geq 0$$

$$P\left(\frac{\xi - np}{\sqrt{npq}} = x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} (1 + O(t)) dt$$

$$E \frac{\xi - np}{\sqrt{npq}} = 0$$

$$D \frac{\xi - np}{\sqrt{npq}} = 1$$

До б. $m = np + x\delta$; $k = n - m = nq - x\delta$

$$P(\xi = m) = P\left(\frac{\xi - np}{\delta} = x\right) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$$

$$\log P(\xi = m) = \log n! - \log m! - \log (n-m)! + m \log p + (n-m) \log q$$

Ф. по Стирлинга: $\log n! = n \log n + \log \sqrt{2\pi n} - n + O(n^{-1})$

$$m = np \left(1 + \frac{x\delta}{np}\right) \xrightarrow{\delta \rightarrow \infty} \infty$$

$$k = nq \left(1 - \frac{x\delta}{nq}\right) \xrightarrow{\delta \rightarrow \infty} \infty$$

$$\Rightarrow \log P(\xi = m) = n \log n - m \log m - k \log k + m \log p + k \log q + \frac{1}{2} \log \frac{n}{2\pi mk} + O_n - O_m - O_k \quad \text{①}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \log \frac{n}{mk} &= \log \frac{1}{npq} - \log\left(1 + \frac{x\delta}{np}\right) - \log\left(1 - \frac{x\delta}{nq}\right) = \\ &= 2 \log \frac{1}{\delta} + O\left(\frac{1}{\delta}\right) \\ \frac{1}{n} &= O\left(\frac{1}{\delta^2}\right) \quad \frac{1}{m} = O\left(\frac{1}{\delta}\right) \quad \frac{1}{k} = O\left(\frac{1}{\delta^2}\right) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{②} \quad & -m \log \frac{m}{np} - k \log \frac{k}{nq} + \log \frac{1}{\delta \sqrt{2\pi}} + O\left(\frac{1}{\delta}\right) = \\ & = \log \frac{1}{\delta \sqrt{2\pi}} - (np + x\delta) \left(\frac{x\delta}{\delta} - \frac{x^2 \delta^2}{2\delta^2} + O\left(\frac{1}{\delta^2}\right)\right) - \\ & - (nq - x\delta) \left(-\frac{x\delta}{\delta} - \frac{x^2 \delta^2}{2\delta^2} + O\left(\frac{1}{\delta^2}\right)\right) + O\left(\frac{1}{\delta}\right) = \\ & = \log \frac{1}{\delta \sqrt{2\pi}} - \frac{x^2}{2} + O\left(\frac{1}{\delta}\right) \end{aligned}$$

Задача: $n = 300$ человек (голландцы) $\xi_i \sim Bi(900, p)$
 p - то что человек-приедем.

Предположим, $p = \frac{1}{2}$

$$P(\xi \leq 90) = P_0\left(\frac{\xi - 150}{\sqrt{75}} \leq \frac{90 - 150}{\sqrt{75}}\right) \approx \Phi\left(-\frac{60}{\sqrt{75}}\right) = \Phi(-7) \sim 10^{-9} \Rightarrow p \neq \frac{1}{2}$$

(33) Нормальное распределение. Его коэффициент эксцесса.

Функция распределения:

$$\Phi_{a, \sigma^2}(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du$$

$$\begin{cases} \xi \sim N(a, \sigma^2) \\ \mathbb{E}\xi = a \\ \text{D}\xi = \sigma^2 \end{cases}$$

Его коэффициент эксцесса

$$\chi_4 = \mathbb{E} X^4 = \mathbb{E} \left(\frac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{\text{D}X}} \right)^4 = 3 \text{ (считается эталоном)}$$

(34) Нормальное распределение. Неравенства
для хвостов.

$$\text{Коэффициент асимметрии } \chi_3 = \mathbb{E} X^3 = \mathbb{E} \left(\frac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{\text{D}X}} \right)^3 = 0$$

$\Rightarrow$ хвосты одинаковые.

Неравенства для хвостов — правило
3-х сигм, но уже интересное:

$$P(|X - \mathbb{E}X| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0.997 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{то что не в } 3\sigma; 0.003 \text{ (ан. дисперсия)}$$

35) ЗАДАЧА О РЕЙТИНГЕ. Решение по неравенству Чебышева.

$x_1 \dots x_n$

Рейтинг - вероятность того, что человек проголосует за Пупыркина.

$$x_i = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & 1-p \end{cases}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \approx p$$

~~Решение~~: $P\left(\underbrace{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - p\right|}_{\text{маленькое}} \leq \underbrace{\epsilon}_{\text{большое}}\right) \geq \gamma$

По неравенству Чебышева:

$$\underbrace{\hspace{1cm}} \geq 1 - \frac{1}{\epsilon^2} D\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right] = 1 - \frac{np(1-p)}{n^2 \epsilon^2} \geq \gamma$$

$$n \geq \frac{1}{4\epsilon^2(1-\gamma)}$$

Если хотим точность $\epsilon = 10^{-3}$; $\gamma = 0,95 \Rightarrow n \sim 5 \cdot 10^6$

А обычно берут 1500 и $10^{-3} \Rightarrow \gamma = 1 - \frac{10^3}{6} \approx 0,0$
НЕ ЛУЗЫ!

36) ЗАДАЧА О РЕЙТИНГЕ. Решение по теореме Мушара-Лапласа.

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - p\right| \leq \epsilon\right) &= P\left(\left|\frac{\sum x_i - np}{p}\right| \leq \epsilon\right) = \\ &= P\left(\left|\frac{\sum x_i - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right| \leq \frac{\epsilon \sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \approx \\ &\approx \Phi\left(\frac{\epsilon \sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - \Phi\left(-\frac{\epsilon \sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\epsilon \sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - 1 \geq \gamma \\ &\Rightarrow \Phi\left(\frac{\epsilon \sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \geq \frac{\gamma+1}{2} \end{aligned}$$

$$\gamma = 0,95 \quad \epsilon = 10^{-3} \Rightarrow n = 10^6 = \frac{u_{\frac{\gamma+1}{2}}^2}{4\epsilon^2}$$

(37) Схема испытаний Бернулли. Геометрическое распределение. Его моменты

$$P(\xi=k) = (1-p)^{k-1} p \quad k=1,2,\dots$$

$$\begin{aligned} E\xi &= \sum_{k=1}^{\infty} k P(\xi=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k p (1-p)^{k-1} = -p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dp} (1-p)^k = \\ &= -p \frac{1}{dp} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k = -p \frac{d}{dp} \left(\frac{1-p}{p} \right) = -p \frac{-p-1+p}{p^2} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

$$D\xi = \frac{1-p}{p^2}$$

(38) Предельная теорема для геометрического распределения, показательное распределение. Его моменты.

Теорема (Релли): $\lim_{p \rightarrow 0} P\left(\frac{\xi}{p} \geq x\right) =$
 $= \lim_{p \rightarrow 0} P\left(\xi \geq \frac{x}{p}\right) = \lim_{p \rightarrow 0} \sum_{k=\lceil \frac{x}{p} \rceil}^{\infty} p (1-p)^k =$
 $= \lim_{p \rightarrow 0} (1-p)^{\lceil \frac{x}{p} \rceil} = \lim_{\lambda = \frac{x}{p} \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)^{\lceil \lambda \rceil} = e^{-x}$

$\lim_{p \rightarrow 0} P\left(\frac{\xi}{p} < x\right) = F(x) = 1 - e^{-x}$; Возьмем функцию
 $f(y) = \lambda e^{-\lambda y}$; $\xi \sim \exp(\lambda)$

$$E\xi = \frac{1}{\lambda} \quad D\xi = \frac{1}{\lambda^2}$$

(39) Показательное распределение. Свойство отсутствия последействия.

(38) + $P(\xi \geq t+s | \xi \geq s) =$

$$= \frac{P(\xi \geq t+s; \xi \geq s)}{P(\xi \geq s)} = \frac{P(\xi \geq t+s)}{P(\xi \geq s)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t}$$

НЕТ t ! 0.0

Magic...

Вроде бы само некро.

40) Совместные распределение, совместные плотности

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ заданы на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Опр. $F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n)$ — функция распределения вектора $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ или функция совместного распределения случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$.

Св-ва:

1) $\forall x_1, x_2: 0 \leq F_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) \leq 1$

2) $F_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2)$ не убывает по каждой координате

3) $\forall i, 2 \exists \lim_{x_i \rightarrow -\infty} F_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) = 0, \exists \lim_{x_1 \rightarrow +\infty} \lim_{x_2 \rightarrow +\infty} F(x_1, x_2) = 1$

4) $F_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2)$ по каждой координате (x_1, x_2) непрерывна слева.

5) $F_{\xi_1}(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow +\infty} F_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2)$

6) $P(a_1 \leq \xi_1 < b_1, a_2 \leq \xi_2 < b_2) = F_{\xi_1, \xi_2}(b_1, b_2) + F_{\xi_1, \xi_2}(a_1, a_2) - F_{\xi_1, \xi_2}(a_1, b_2) - F_{\xi_1, \xi_2}(b_1, a_2)$

Опр. Ф-ция $f(z_1, z_2)$ — к-ая-ли плотностью с-лз. вектора (x_1, x_2) если $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad F(a_1, a_2) = \int_{-\infty}^{a_1} \int_{-\infty}^{a_2} f(z_1, z_2) dz_1 dz_2$

Умб. Если (x_1, x_2) имеют плотность $f(z_1, z_2)$, то

x_1 имеют плотность $f(z_1)$ и $f(z_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z_1, z_2) dz_2$

$\Rightarrow F_{x_1}(a_1) = \int_{-\infty}^{a_1} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(z_1, z_2) dz_2 \right) dz_1$

41

Условные плотности и условные математические ожидания.

Дискретный случай:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \text{ - условная вероятность}$$

$$\left. \begin{array}{l} \xi: x_1, x_2, \dots \\ \eta: y_1, y_2, \dots \end{array} \right\} \Rightarrow P(\xi=x_i | \eta=y_k) = \frac{P(\xi=x_i, \eta=y_k)}{P(\eta=y_k)}$$

$$E(\xi | \eta=y_k) = \sum_i x_i \frac{P(\xi=x_i | \eta=y_k)}{P(\eta=y_k)} = f(y_k) \text{ -}$$

условное мат. ожидание.

$$\text{Задание: } \forall B \in \mathcal{B}: E[E(\xi | \eta) \mathbb{1}_{(\eta \in B)}] = \sum_{j: y_j \in B} f(y_j) \cdot P(\eta=y_j) =$$

$$= \sum_{j: y_j \in B} \sum_k x_k \frac{P(\xi=x_k, \eta=y_j)}{P(\eta=y_j)} \cdot P(\eta=y_j) =$$

$$= \sum_{j: y_j \in B} \sum_k x_k P(\xi=x_k, \eta=y_j) = E[\xi \cdot \mathbb{1}_{(\eta \in B)}]$$

Абсолютно непрерывный случай:

$$P((\xi, \eta) \in B) = \int_B p(x, y) dx dy$$

B - прямоугольник

Ввести $P(\xi < x | \eta = y)$ не можем, так $\frac{P(\xi < x | \eta = y)}{P(\eta = y)} = 0$

$$P(\xi < x | y \leq \eta \leq y + \epsilon) = \frac{P(\xi < x, y \leq \eta \leq y + \epsilon)}{P(y \leq \eta \leq y + \epsilon)} =$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^x \int_y^{y+\epsilon} p_{\xi, \eta}(x, y) dy dx}{\int_y^{y+\epsilon} p_{\eta}(y) dy} = \int_{-\infty}^x \frac{\epsilon \cdot p_{\xi, \eta}(x, y)}{\epsilon \cdot p_{\eta}(y)} dx \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^x \frac{p_{\xi, \eta}(z, y)}{p_{\eta}(y)} dz$$

$$\text{Условная плотность: } p_{\xi | \eta=y}(x, y) = \frac{p_{\xi, \eta}(x, y)}{p_{\eta}(y)}$$

$$E(\xi | \eta=y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p_{\xi | \eta=y}(x, y) dx = f(y) \Rightarrow f(\eta) = E(\xi | \eta)$$

априорная версия

$$P(E(\xi | \eta=y) \in B) = P(f(\eta) \in B) = P(\eta \in f^{-1}(B))$$

$$E(E(\xi | \eta) \mathbb{1}_{(\eta \in B)}) = E(f(\eta) \mathbb{1}_{(\eta \in B)}) = \int_B f(y) p_{\eta}(y) dy =$$

$$= \int_B \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{p_{\xi, \eta}(x, y)}{p_{\eta}(y)} dx \cdot p_{\eta}(y) dy = \int_B \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p_{\xi, \eta}(x, y) dx dy = E[\xi \mathbb{1}_{(\eta \in B)}]$$

Сб-ба:

a) $E(a\xi_1 + b\xi_2 | \mathcal{F}) = a E(\xi_1 | \mathcal{F}) + b E(\xi_2 | \mathcal{F})$

б) $E E(\xi | \mathcal{F}) = E \xi$

в) ξ $\mathcal{F}$ измерима $\Rightarrow E(\xi | \mathcal{F}) = \xi$

г) ξ $\mathcal{F}$ измерима $E(\xi \cdot \eta | \mathcal{F}) = \eta E(\xi | \mathcal{F})$

д) $E(E(\xi | \mathcal{F}_1) | \mathcal{F}_2) = \begin{cases} E(\xi | \mathcal{F}_1) & \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \\ E(\xi | \mathcal{F}_2) & \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1 \end{cases}$



Это базисный случай:

Предположим: $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$

Доп: η измерима по $\mathcal{F} : \forall B \in \mathcal{B} \ \eta^{-1}(B) \in \mathcal{F}$

Доп: $E(\xi | \eta)$
 1. $E(\xi | \mathcal{F})$ - $\mathcal{F}$ измерима
 2. $\forall A \in \mathcal{F} \ E[E(\xi | \mathcal{F}) \mathbb{1}_A] = E \xi \mathbb{1}_A$

Доп: $\mathcal{F} = \sigma(\eta)$ содержит все $\{\eta^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\} = \mathcal{F}$

Доп: $E(\xi | \eta) = E(\xi | \sigma(\eta))$ - это и есть базисный случай.

42) Виды сходимости случайных величин.
Связи между ними.

$\xi_1, \xi_2, \dots$ - послед. сл. величин.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

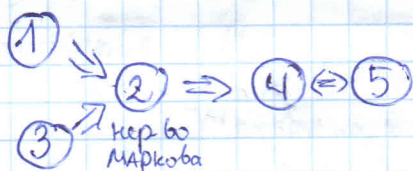
Почти наверное (1) $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n.н.} \xi : P\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\} = 1$

По вероятности (2) $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \xi : \forall \varepsilon > 0 \quad P\{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

В среднем (3) $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_p} \xi \quad E|\xi_n - \xi|^p \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

По распределению (4) $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \xi : F_{\xi_n}(x) \rightarrow F_{\xi}(x) \quad \forall x: F_{\xi}(x) \text{ непрерывна}$

Слабая (5) $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s} \xi$
 $\forall f(x) \text{ непрерывна и ограничена} \quad E f(\xi_n) \rightarrow E f(\xi)$



①, ②, ③ связны одним вероятностным пространством
② и ④ наоборот нет.

③ $\Rightarrow$ ② : обобщенное нер-во Чебышева:
 $P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|\xi_n - \xi|^r}{\varepsilon^r} \rightarrow 0$

② $\nRightarrow$ ③ (и ①)
 $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$ λ -мера Лебега.
 $\xi_n = \begin{cases} e^n, & \text{если } 0 \leq \omega \leq 1/n \\ 0, & \text{если } 1/n < \omega \leq 1 \end{cases} \quad \xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0 \quad (\text{так как } \xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{n.н.} 0)$
 но $E|\xi_n|^r = \frac{e^{rn}}{n} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty \quad \forall r > 0$

① $\Rightarrow$ ② т.е. Две вещи, чтобы $\xi_n \rightarrow \xi$ (P.н.н.) необходимо и достаточно.

$\forall \varepsilon > 0 \quad P(\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$

Д-во: $A_n^\varepsilon = \{\omega : |\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\}$. $A^\varepsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon \Rightarrow$
 $= \{\omega : \xi_n \not\rightarrow \xi\} = \bigcup_{\varepsilon > 0} A^\varepsilon = \bigcup_{m=1}^{\infty} A^{\frac{1}{m}}$, но
 $P(A^\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon)$. По лемме.

$0 = P(\omega : \xi_n \not\rightarrow \xi) = P(\bigcup_{\varepsilon > 0} A^\varepsilon) \Leftrightarrow P(\bigcup_{m=1}^{\infty} A^{\frac{1}{m}}) = 0 \Leftrightarrow P(A^\varepsilon) = 0, \forall \varepsilon > 0 \Leftrightarrow P(\bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad P(\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

② $\Rightarrow$ ④

$f(x) \in C$

$$\epsilon > 0 \quad \exists N: P(|f| > N) \leq \frac{\epsilon}{4c}$$

⑤

$$\exists \delta: \forall |x| \leq N \quad |x-y| \leq \delta: |f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{4c}$$

$$\begin{aligned} |f(\xi_n) - f(\xi)| &= E(|f(\xi_n) - f(\xi)|; |\xi_n - \xi| \leq \delta, |\xi| \leq N) + \\ &\quad + E(|f(\xi_n) - f(\xi)|; |\xi_n - \xi| \leq \delta, |\xi| > N) + \\ &\quad + E(|f(\xi_n) - f(\xi)|; |\xi_n - \xi| > \delta) \leq \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} + 2cP(|\xi_n - \xi| > \delta) = \epsilon + 2cP(|\xi_n - \xi| > \delta) \end{aligned}$$

$$\text{If } P(|\xi_n - \xi| > \delta) \rightarrow 0 \Rightarrow \text{as } n \rightarrow \infty \quad \downarrow$$

(43)

Характеристические функции. Их простейшие свойства.

Опр. Характеристической функцией случайной величины ξ называется функция $f_{\xi}(t) = \mathbb{E} e^{it\xi} = \mathbb{E} \cos t\xi + i \mathbb{E} \sin t\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_{\xi}(x)$.

Предположим, что $\xi \sim P_f(x) \Rightarrow \mathbb{E} e^{it\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p_f(x) dx = f_f(t)$

$$0) f_{f_1+f_2}(t) = \mathbb{E} e^{it(\xi_1+\xi_2)} = \mathbb{E} e^{it\xi_1} e^{it\xi_2} = \mathbb{E} e^{it\xi_1} \mathbb{E} e^{it\xi_2} = f_{f_1}(t) f_{f_2}(t)$$

Св-ва:

$$1) f_{\xi}(0) = 1$$

$$2) |f_{\xi}(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx}| dF_{\xi}(x) = 1$$

3) $f_{\xi}(t)$ равномерно непрерывна по t

$$h > 0: |f_{\xi}(t+h) - f_{\xi}(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t+h)x} dF_{\xi}(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_{\xi}(x) \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx}(e^{ihx} - 1)| dF_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{ihx} - 1| dF_{\xi}(x) =$$

$$\stackrel{\text{Функция Рунге}}{=} \int_{-M}^M |e^{ihx} - 1| dF_{\xi}(x) + \int_{|x| \geq M} |e^{ihx} - 1| dF_{\xi}(x) = (*)$$

$$\int_{|x| \geq M} |e^{ihx} - 1| dF_{\xi}(x) \leq 2 \int_{|x| \geq M} dF_{\xi}(x) = 2P(|\xi| \geq M) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(*) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$4) \overline{f_{\xi}(t)} = f_{\xi}(-t)$$

$$5) f_{\xi}(t) \text{ действительная} \Leftrightarrow \xi \stackrel{d}{=} -\xi$$

$$6) \xi \sim f_{\xi}(t)$$

$$a\xi + b \text{ ?}$$

$$f_{a\xi+b} = \mathbb{E} e^{it(a\xi+b)} = \mathbb{E} e^{ita\xi} \cdot e^{itb} = e^{itb} \mathbb{E} e^{ita\xi} = e^{itb} f_{\xi}(at)$$

$$7) \text{ Если } \mathbb{E} |\xi|^k < \infty, \text{ то } \exists f_{\xi}^{(k)}(t) \text{ — непрерывна,}$$

$$f_{\xi}^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E} \xi^k$$

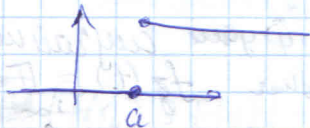
$$\text{Д.б.о. } |\int_{-\infty}^{+\infty} ix e^{itx} dF_{\xi}(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x| dF_{\xi}(x) = \mathbb{E} |\xi| < \infty$$

$$f'_{\xi}(t) = i \mathbb{E} \xi e^{it\xi} = i \mathbb{E} \xi f_{\xi}(t)$$

$$f'_{\xi}(0) = i \mathbb{E} \xi \quad \forall \xi$$

Примеры:

1) $P(\xi=a)=1 \Rightarrow f_\xi(t) = e^{it a}$



2) $\xi = \int_0^1 p$ $f_\xi(t) = e^{it} p + (1-p) = 1 + p(e^{it} - 1)$

3) $\xi \sim \text{Bi}(n, p)$ $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_n$

$f_\xi(t) = (f_{\xi_1}(t))^n = [1 + p(e^{it} - 1)]^n$

Accur $p = \frac{\lambda}{n}$ $\lambda > 0, n \rightarrow \infty \rightarrow \exp(\lambda(e^{it} - 1))$

4) $\xi \sim \text{Pois}(\lambda)$

$f_\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{\lambda(e^{it} - 1)}$

5) $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$f_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

$f'_\xi(t) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -t f(t)$

$f(0) = 1$

$f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$

(44)

Теорема непрерывности соответствия
между распределенными и сосредоточенными
функциями.

$f_1, f_2 \dots \rightarrow \delta$

$$1) f_{jk}(t) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$f(t)$ - непрерывна в м. 0 $\Rightarrow f(t)$ - хар. ф.

$$|f_{jk}(x)| \Rightarrow F_j(x)$$

$$2) \text{ Пусть } F_{jk}(x) \xrightarrow{\text{слабая с-ва}} F_j(x), \text{ тогда}$$

$$f_{jk}(t) \rightarrow f_j(t), \quad |t| \leq T, \quad \forall T > 0$$

В каждом м. т это с-ва равномерна в каждом
интервале длины $2T$.

Формула обращения:

$$F(x) \text{ - хар. ф. } f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d(F(x))$$

а) a, b - точки $F(x)$ непрерывна в них ($a < b$)

$$F(b) - F(a) = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^c \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} f(t) dt$$

$$б) \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty \Rightarrow F(x) \text{ ас. непрерывна}$$

$$\text{и } \exists p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-itx} f(t) dt)$$

(45)

Закон больших чисел в форме Хинчина.

Теорема: $\xi_1, \xi_2, \dots$ — н.о.р.с.в., $\mathbb{E}\xi_i = a$ Тогда $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \xi_j \xrightarrow{P} a$.Д-во: Пусть $f(t) = \mathbb{E} e^{it\xi_j}$

$$\left(f\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \text{ — х.р. суммы} = \mathbb{E} e^{it \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \xi_j} \xrightarrow{\text{нужно доказать}} e^{iat}$$

$$l(t) = \ln f(t)$$

$$l'(0) = \frac{f'(0)}{f(0)} = ia \quad l(0) = 0$$

$$\left(f\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \mathbb{E} e^{it \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \xi_j}$$

$$\stackrel{||}{=} e^{l\left(\frac{t}{n}\right) \cdot n} = \exp\left\{t \cdot \frac{l\left(\frac{t}{n}\right) - l(0)}{\frac{t}{n}}\right\} \rightarrow e^{t l'(0)} = e^{tia}$$

(46)

Центральные предельные теоремы

 $\xi_1, \xi_2, \dots$ — н.о.р.с.в. $\mathbb{E}\xi_i = a$, $D\xi_i = \sigma^2 < \infty$

$$\xi'_n = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \quad (\mathbb{E}\xi_i = 0; D\xi_i = 1)$$

Пусть $a=0$. Тогда $F_n(x) = P(\xi'_n < x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$

Д-во: $f(t) = \mathbb{E} e^{it\xi_1}$

$$f_n(t) = \mathbb{E} e^{it\xi'_n} = \left(f\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

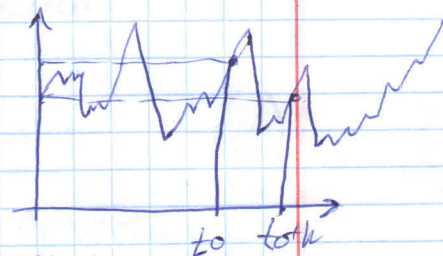
$$\begin{aligned} f(t) &= f(0) + t f'(0) + \frac{t^2}{2} f''(0) + o(t^2) = \\ &= 1 - \frac{t^2 \sigma^2}{2} + o(t^2) \end{aligned}$$

$$\ln f_n(t) = n \ln \left[1 - \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \right] =$$

$$= n \left(-\frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \right) = -\frac{t^2}{2} + o(1) \Rightarrow -\frac{t^2}{2}$$

47 ЦПТ как оценка скорости сходимости в 354.

$P(t)$ - цена акции



$X = P(t_0 + h) - P(t_0)$ имеет нормальное распределение (т.к. представляем собой сумму приращений на малых отрезках)

$$\frac{1}{n} S_n - a \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \eta_n = \left| \frac{1}{n} S_n - a \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{как быстро } \eta_n \text{ стремится к 0?}$$

Судя-ли $c_n \in \mathbb{R}$: $\frac{\eta_n}{c_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ - не выходит в 0 и применим Лемма Бессежана

$$\eta_n = \left| \frac{S_n - na}{n} \right| \quad c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{\eta_n}{c_n} = \left| \frac{S_n - na}{\sqrt{n}} \right| \quad P\left(\frac{\eta_n}{c_n} < x\right) = P\left(\frac{S_n - na}{\sqrt{n}} < \frac{x}{2}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Phi\left(\frac{x}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{x}{2}\right) = 2\Phi\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

сходимость порядка $\frac{1}{n}$

Если не выполняются лпт, $E|X|^{2+\delta} < \infty \Rightarrow n^{-\frac{\delta}{2}}$
(Без ЦПТ-в)

(18)

Условие Линдберга. Теорема
Линдберга-Феллера.

Условие: $\forall \varepsilon > 0 \quad \frac{1}{D_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|x-a_i| > \varepsilon D_n} (x-a_i)^2 dF_i(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (1)$

$$F_i(x) = P(\xi_i \leq x); \quad D_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 \quad a_i = E\xi_i$$

$$\sigma_k^2 = D\xi_k > 0$$

Теорема Линдберга-Феллера:

$$\max_{1 \leq i \leq n} P\left(\frac{|\xi_i - a_i|}{D_n} > \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (3)$$

$$P\left(\frac{S_n - ES_n}{D_n} < x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x) \quad (2)$$

$$(3) + (2) \Leftrightarrow (1)$$

Доказательство 2-го:

$$(1) \Rightarrow (3)$$

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq n} P\left(\frac{|\xi_i - a_i|}{D_n} > \varepsilon\right) &\leq \sum_{i=1}^n P\left(\frac{|\xi_i - a_i|}{D_n} > \varepsilon\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{|x-a_i| > \varepsilon D_n} dF_i(x) = \sum_{i=1}^n \int_{|x-a_i| > \varepsilon D_n} \frac{(x-a_i)^2}{\varepsilon^2 D_n^2} dF_i(x) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 D_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|x-a_i| > \varepsilon D_n} (x-a_i)^2 dF_i(x) \end{aligned}$$

↑
условие Линдберга

(49)

Теорема Леманова. Взаимосвязь условия Леманова и условие Лундберга.

Теорема: $m_i^3 = E|\xi_i - a_i|^3$ ^{и для каждого}
 $M_n^3 = m_1^3 + \dots + m_n^3$ $\frac{M_n^3}{D_n^3}$ - лемановские сред
нормализованные квадратичные дисперсии

Если $\frac{M_n^3}{D_n^3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow P\left(\frac{S_n - ES_n}{D_n} < x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x)$

до-во:

$$\frac{1}{D_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|x-a_i| > \varepsilon D_n} \frac{|x-a_i|^3}{|x-a_i|} dF(x) \leq \frac{1}{\varepsilon D_n^3} \sum_{i=1}^n \int_{|x-a_i| > \varepsilon D_n} |x-a_i|^3 dF(x) \leq \frac{M_n^3}{\varepsilon D_n^3}$$

Условие Леманова сильнее условия Лундберга.

$$\frac{M_n^3}{D_n^3} = \frac{m^3 \cdot n}{n^2 \sigma^3} = \frac{m^3}{\sigma^3 \sqrt{n}} \text{ - при Леманова выполняется для д.р.с.в.}$$

(50)

Оценки скорости сходимости в ЦПТ

$$\beta^3 = E|\xi_1 - a|^3 < \infty$$

Нер-бо Берри-Эссена: $\sup_x |P\left(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi(x)| \leq C_0 \frac{\beta^3}{\sigma^3 \sqrt{n}}$

1956 $C_0 \approx 0,4097$

2010 $C_0 \leq 0,4784$ (^-^ Мельникова и Королёв)

(51)

Статистическая структура. Выборка.
Вариационный ряд. Порядковые статистики

Статистическая структура - совокупность $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Ω - мн-во элементарных исходов
 $\mathcal{F}$ - совокупность событий, σ -алгебра под Ω
 P - семейство вероятностных мер

Семейство м.б. параметрически $P_\theta = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$
Как правильно рассмотреть с.в. X на Ω и индуцированную
ее статистическую структуру $\mathcal{B}, P_X$

$\mathcal{X}$ - мн-во значений X
 $\mathcal{B}$ - борелевская сигма-алгебра
 $\forall B \in \mathcal{B} \quad P_X(B) = P(X \in B)$

$X = (x_1, \dots, x_n)$ - выборка
набор с.в.

Если независимые с.в. - независимая выборка
Если y_i од. распределен - однородная выборка

Везде далее **выборка** := независимая одор. выборка

Упорядочен $(x_1, \dots, x_n)$: $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)} \Rightarrow$

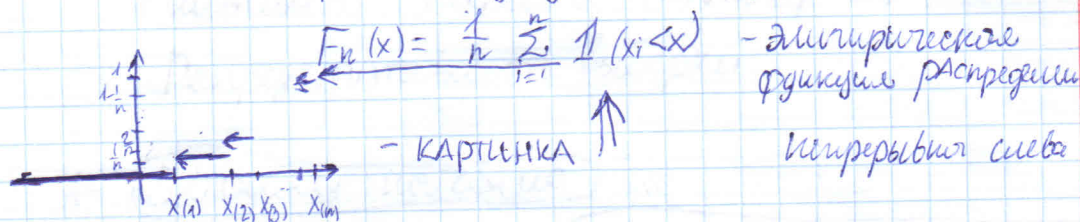
$\Rightarrow (x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ - вариационный ряд

$(x_{(1)})$ - порядковые статистики

НЕ ЯВЛЯЮТСЯ
НЕ ЗАВИСИМЫМИ.

52

Эмпирическая функция распределения. Непрерывность
равномерного расхождения между теоретической
и эмпирической функцией распределения от теор.р.



$$F_n(x) \approx F(x)?$$

$$E F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E \mathbb{1}_{(x_i \leq x)} = \frac{1}{n} n F(x) = F(x) \quad (\text{по теореме о с.с.т.})$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \Rightarrow F_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(x)$$

$$n F_n(x) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(x_i \leq x)} \sim B(n, F(x))$$

$$P(n F_n(x) = k) = C_n^k (F(x))^k (1-F(x))^{n-k}$$

$$D(n F_n(x)) = n F(x) (1-F(x))$$

$$\Rightarrow D F_n(x) = \frac{1}{n} F(x) (1-F(x))$$

$$\frac{n F_n(x) - n F(x)}{\sqrt{\frac{1}{n} F(x) (1-F(x))}} = \sqrt{n} \frac{F_n(x) - F(x)}{\sqrt{F(x) (1-F(x))}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d \sim N(0,1)$$

по теореме Муавра-Лапласа
сх-е не завис-щих к.з.

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$$

↑ зависимость от $F(x)$. Пусть $F(x)$ - непрерывна и монотонна.

$$D_n = \sup_{y \in [0,1]} |F_n(F^{-1}(y)) - y|$$

$$F_n(F^{-1}(y)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(x_i < F^{-1}(y))} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{(F(x_i) < y)}$$

53

Эмпирические функции распределения. Теорема Гливенко. Теорема Колмогорова. Репрезентативность выборки.

+ 52 билет колдано

Теорема Гливенко:

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_x |F_n(x) - F(x)| = 0) = 1$$

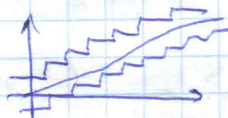
$$P(D_n < \gamma) = K_n(\gamma) - \text{решим } K_n(K_n(\gamma)) = \gamma$$

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$$

$$P(F_n(x) - K_n(1-\gamma) \leq F(x) \leq F_n(x) + K_n(1-\gamma)) = 1-\gamma$$

$$\Rightarrow P(D_n \leq K_n(1-\gamma)) = 1-\gamma$$

Смиссл:



Теорема Колмогорова:

$$F(x) - \text{кнрн}, \text{ тогда } \forall x \quad K_n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \approx K(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt{n} D_n \leq x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j e^{-\frac{1}{2}x^2} = K(x)$$

Безумная задача $(\wedge \wedge //)$: $n: X = (x_1, \dots, x_n)$
- какие то выборки объема n .

Репрезентативна ли эта выборка?
Достаточно ли ее объема для выводов.

$\forall n$ задача имеет решение.

$$P(\sqrt{n} D_n \leq \varepsilon) = K_n(\varepsilon) = \gamma \quad \varepsilon = K_n(\gamma)$$

$$P(\sqrt{n} \sup_x |F_n(x) - F(x)| \leq \varepsilon) = P(F_n(x) - \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \leq F(x) \leq F_n(x) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}) = \gamma$$

т.е. величина $\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$?

$$\gamma - \text{надежность, } \frac{K_n(\gamma)}{\sqrt{n}} = \varepsilon - \text{точность}$$

То есть "надежность будет равняться с вероятностью $1-\gamma$ "

(54)

Выборочные моменты. Их свойства.

 $X = (x_1, \dots, x_n)$ - выборка

$$a_k = \mu_k = \mathbb{E}X_i^k; \quad m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k = \mathbb{E}X_i^k - \text{выборочный момент}$$

 $x_i \sim F(x)$

$$\mathbb{E}X_i = a \approx \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \mathbb{E}\bar{X} = a$$

$$D X_i = \sigma^2$$

$$D\bar{X} = \frac{1}{n} \sigma^2$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2$$

$$\mathbb{E}s^2 = \sigma^2$$

~~Еще свойства~~

$$m_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{П.П.}} \mathbb{E}X_i^k$$

$$m_k - a_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^k - a_k) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^k - a_k}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\frac{\sqrt{n}(m_k - a_k)}{\sqrt{a_{2k} - a_k^2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \xi \sim N(0,1)$$

$$D X_i^k = a_{2k} - (a_k)^2$$

 z - Value at Risk

$$\mathbb{P}(X > z) = \varepsilon$$

↑ квантиль

 $X(1) \dots X(n)$ - вариационный ряд

$$\pi \approx X_{(\lfloor \pi n \rfloor + 1)}$$

Пусть $n = 100\%$ $\Rightarrow$ квантиль порядка $1 - \varepsilon$ Если у нас квантиль $\Rightarrow$ медиана.

$$\Rightarrow X_{(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1)} - \text{нечетное}$$

$$\frac{1}{2} (X_{(\frac{n}{2})} + X_{(\frac{n}{2}+1)}) - \text{четное } n$$

(55)

Точечное оценивание. Критериальность
Рao-критерия. Эффективные оценки.

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$$X_i \sim F(x; \theta) \quad \theta \in \Theta$$

Статистическая структура $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \mathcal{P})$

$$\mathcal{P} = \{P_\theta: \theta \in \Theta\}$$

Задача: поиск $\theta \in \Theta$, которое было бы
ближко к истинному параметру

Опр. Интервальная функция выборки ил-се
статистик.

$$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\mathcal{B}_n \quad \mathcal{B}_m$$

$$\forall B \in \mathcal{B}_m \{x = (x_1, \dots, x_n): T(x) \in B\} \in \mathcal{B}_n$$

Опр. Оценка - статистика, принимающая
значение в Θ $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \Theta$

Несмещенная $T(X) \in \Theta$ $T(\theta) \in \Theta \quad \forall \theta \in \Theta$

Состоятельная $T(X) = T_n(X) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T(\theta)$ $P(T_n(X) - T(\theta) < \epsilon) \rightarrow 1$

Функция правдоподобия: $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$

$$L(\theta, x) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta) & \text{в абе непр. случае} \\ P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, \theta) & \text{в дискр. случае} \end{cases}$$

Если $L(\theta, X) > 0$ и достаточно гладкая, то $U(X, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L$.

Забывность: $E_\theta U(X, \theta) = \int U(X, \theta) L(\theta, x) \nu(dx) =$ функция вклада в абе

$$\begin{aligned} \kappa(\theta) &= \int \frac{\partial}{\partial \theta} (\ln L(X, \theta) \cdot L(X, \theta)) \nu(dx) = \int \frac{\partial}{\partial \theta} L(\theta, x) \nu(dx) = \frac{\partial}{\partial \theta} \int L(\theta, x) \nu(dx) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} 1 = 0 \end{aligned}$$

Пусть $U(X, \theta)$ 2-й момент. $\forall \theta \in \Theta \quad E_\theta U^2(X, \theta) = I_\theta U(X, \theta) = I_\theta$

$I_n(\theta)$ - Фишеровские информационные

$$I_n(\theta) = D_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \left(\prod_{i=1}^n p(x_i; \theta) \right) = D_\theta \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} \ln(p(x_i; \theta)) = D_\theta \sum_{i=1}^n U(x_i; \theta) = n \cdot I(\theta)$$



Теорема (Рao-Крамера): $\forall T(X) \in \mathcal{T}$

$$ID_{\theta}(T(X)) \geq \frac{(\sigma'(\theta))^2}{n I(\theta)}$$

Оценку мы можем, если знаем $I(\theta)$

Д-во: $E_{\theta} T(X) = \sigma(\theta) = \int T(x) L(\theta; x) d\theta$

$$\sigma'(\theta) = \int T(x) \frac{\partial}{\partial \theta} L(\theta; x) d\theta =$$

$$= \int T(x) \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta; x) \cdot L(\theta; x) d\theta =$$

$$= E_{\theta} T(X) U(X; \theta) = \text{cov}(T(X), U(X; \theta))$$

$$|\text{cov}(\xi, \eta)|^2 \leq ID_{\xi} ID_{\eta}$$

$$(\sigma'(\theta))^2 = (\text{cov}(T(X), U(X; \theta)))^2 \leq ID_{\theta} T(X) \cdot ID_{U(X; \theta)} = n \cdot I_n(\theta)$$

что

Оценка $T(X)$ регуляр-го Рао-Крамера обращается в равенство эффективности.

$$T(X) \text{ - эффективна} \Leftrightarrow T(X) = \sigma(\theta) + c(\theta) \cdot U(X; \theta)$$

56

Достаточные статистики. Критерий факторизации.

Опр. Статистика $T(X)$ - достаточная, если $\forall A \in \mathcal{B}^n$ $P_\theta(X \in A | T(X))$ не зависит от θ т.е. условная плотность $X = (x_1, \dots, x_n)$ не зависит от θ .

Критерий факторизации: $T(X)$ - достаточная $\Leftrightarrow$
 $L(x, \theta) = g(T(x); \theta) \cdot h(x)$

Д-во: (дискр. случай)

$\Rightarrow$ $T(X)$ - достаточная $\Leftrightarrow$

$P_\theta(X=x | T(X)=t)$ не зависит от θ

Пусть $T(X)=t \Rightarrow \{X=x\} \subseteq \{T(X)=t\}$

$$L_\theta(x, \theta) = P_\theta(X=x) = P_\theta(X=x, T(X)=t) =$$

$$= \underbrace{P_\theta(X=x | T(X)=t)}_{h(x, \theta)} \cdot \underbrace{P_\theta(T(X)=t)}_{g(t, \theta)} = \text{что}$$

$\Leftarrow$ $L(x, \theta) = g(t, \theta) \cdot h(x)$

$$\text{для } x: T(X)=t \Rightarrow P(X=x | T(X)=t) =$$

$$= \frac{P_\theta(X=x)}{\sum_{x: T(X)=t} P_\theta(X=x)} = \frac{g(t, \theta) h(x)}{\sum_{x: T(X)=t} g(t, \theta) h(x)} = \frac{h(x)}{\sum h(x)} \text{ не зависит от } \theta$$

(57)

Оптимальные оценки. Теорема Блэкуэлла - Колмогорова.

Дир. Оценка $T(X)$ ф-ции $\tau(\theta)$ оптимальные:

- 1) $T(X)$ - несмещенная ($E T(X) = \tau(\theta)$)
- 2) имеет равномерно минимальную дисперсию, т.е. $\forall T_1(X)$ - несмещенно
 $10_{\theta} T(X) \leq 10_{\theta} T_1(X) \quad \forall \theta \in \Theta$

Теорема (Рao - Блэкуэлла - Колмогорова): $T(X)$ - достат. ст.

Если $\exists T_1(X)$ - оптимальное оценивание, то $T_1(X) = T(X)$

2-го: $T(X)$ - дост. статистика с плотностью $g(t; \theta)$
 $T_1(X)$ - любое другое несмещенное

$$H(t) = E_{\theta} (T_1(X) | T(X) = t) = \int T_1(x) L(x|t, \theta) dx$$

условная плотность
X при условии T=t

не зависит от θ

Рассмотрим $H(T(X))$

$$\begin{aligned} 1) E_{\theta} H(T(X)) &= \int H(t) g(t, \theta) dt = \int E_{\theta} (T_1(X) | T(X) = t) g(t, \theta) dt = \\ &= \int T_1(x) \left[\int L(x|t, \theta) g(t, \theta) dt \right] dx = \\ &= \int T_1(x) L(x, \theta) dx = E T_1(X) = \tau(\theta) \text{ - несмещенное} \end{aligned}$$

$$2) \text{ докажем, что } 10_{\theta} H(T(X)) \leq 10_{\theta} T_1(X)$$

$$\begin{aligned} \forall \theta: 10_{\theta} T_1 &= E_{\theta} [T_1 - \tau(\theta)]^2 = E_{\theta} [T_1 - H(t) + H(t) - \tau(\theta)]^2 \\ &= \underbrace{E (T_1 - H(t))^2}_{(*)} + 2 \underbrace{E [(T_1 - H(t)) (H(t) - \tau(\theta))]}_{!!} \geq \end{aligned}$$

$$\geq 10_{\theta} H(t) \quad \text{равенство в силу } (T_1 - H(t))^2 \geq 0$$

$T_1 = H(t)$

$$(*) = \int E_{\theta} (T_1 | T=t) - H(t) \{ H(t) g(t, \theta) \} dt = 0, \text{ откуда}$$

$H(t)$ $\tau(\theta)$

Полные статистики. Теорема Лемма - Шеффе

Достаточная статистика называется полной, если
 $\forall \varphi(T(x)) : E_{\theta} \varphi(T(x)) = 0 \Rightarrow \varphi(\theta) = 0$ на всем
 мн-ве значений $\varphi(T(x))$

Теорема (Лемма - Шеффе): Пусть T полная
 достаточная статистика, всякая ф-ция от
 нее будет оптимальной оценкой своего
 истин. ожидания.

Д-во: Если T -полная статистика то $\exists!$

$H(\theta) : E_{\theta} H(\theta) = 0 \forall \theta$ в силу
 Блекуэма - Колмогорова можно
 улучшить

что.

59) Оценка максимального правдоподобия. (ix)
асимптотические свойства:

Оценка максимального правдоподобия $\hat{\theta}(X)$
параметра θ называется функцией от выборки,
что $\max_{\theta} L(X, \theta) = L(X, \hat{\theta}(X))$
функция правдоподобия выборки $X = (x_1, \dots, x_n)$

и максимальная берется по всем $\theta \in \Theta$

Св-ва:

- 1) не обязательно состоятельная
- 2) может не быть несмещенной
- 3) не единственная.

Если $\exists$ единственное достаточное статистика T
для параметра θ , то ОМП $\hat{\theta}$ есть функция от T .

Пусть $\hat{\theta}$ - ОМП для θ . Если $\tau(\cdot)$, у которой $\tau^{-1}(\cdot)$ однозначна,
то ОМП $\tau(\hat{\theta})$ если $\tau(\hat{\theta})$

4) $L(\theta, x)$ диф-на по $\theta \in \Theta$. $T(X)$ - дфф. на $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \hat{\theta} = T(X)$

Дво: $T(X) - \theta = a(\theta) U(X, \theta) = a(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta, X)$

$$\frac{T(X) - \theta}{a(\theta)} = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta, X) = 0 \quad \text{если}$$

5) $\exists T(X) \exists$ д.м.п. $\Rightarrow \hat{\theta} = \theta(T)$; $L(\theta, X) = h(X) g(\theta, T(X))$

6) $\mathcal{P} = \{P_{\theta}; \theta \in \Theta\}$ $\Theta \subseteq \mathbb{R}$

Пусть 1) $\exists \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \ln(f(x, \theta))$

2) $E_{\theta} M(X) < \infty \quad \forall \theta \in \Theta$

Тогда

- 1) ОМП состоятельная
- 2) $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \frac{1}{I(\theta)})$
 $\hat{\theta} \sim N(0, \frac{1}{I(\theta)})$

60

Оценки метода моментов

Оценки - решение системы

$$\mu_r = EX^r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^r = m_r \quad r=1, 2, \dots, k$$

k - число параметров

Оценки метода моментов:

1) не единственны

2) могут не быть функциями от достаточной или полной статистик.

// Больше ни в лекциях, ни в ИНТЕРНЕТАХ НЕТ

Можете привести какие-нибудь забавные примеры

любые выборочные характеристики

GI) Интервальные оценивание. Метод центральной симметричной функции

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \mathcal{P})$$

$$\{P_\theta: \theta \in \Theta\}$$

НЕ
НАД

$$\begin{aligned} 1) T(X) &= \theta \\ 2) P_\theta (T_1(X) \leq \theta \leq T_2(X)) &= \gamma \end{aligned}$$

$$\forall \theta \in \Theta$$

$(T_1(X), T_2(X))$ - доверительный интервал
для θ . γ - доверительная вероятность

Опр $G(X, \theta)$

- 1) не зависит от θ
- 2) мон-на по θ

$G(X, \theta)$ - у.с.б. $f_G(t)$ - плотность

$$g_1, g_2: P_\theta (g_1 \leq G(X, \theta) \leq g_2) = \gamma$$

$$\int_{g_1}^{g_2} f_G(t) dt = \gamma$$

Введем $T_1(X): G(X, T_1(X)) = g_2$
 $T_2(X): G(X, T_2(X)) = g_1$

$$\gamma = P_\theta (g_1 \leq G(X, \theta) \leq g_2) = P_\theta (T_1(X) \leq \theta \leq T_2(X))$$

Теорема: Пусть $F(X, \theta) = P_\theta (X \leq x)$ - кумулянт и монотонно $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ у.с.б. $\exists$ можно брать

$$G(X, \theta) = -\sum_{j=1}^n \ln F(x_j, \theta) \quad (*)$$

~~Определение~~
 ~~$\theta \in \Theta$~~

~~$\theta \in \Theta$~~

$\in$

Распределение $(*)$ $f_G(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-t} \quad t > 0$
 - эрланова распр.

(62)

Интервальные оценивание с помощью
точечной оценки.

$$\exists T(X) = \theta \in \mathbb{R}^1$$

$$P_\theta(T(X) \leq t) = F_T(t, \theta)$$

$$0 < p_1 < p_2 < 1$$

$$j_1(\theta) = F_T(j_1(\theta), \theta) = p_1$$

$$j_2(\theta) = F_T(j_2(\theta), \theta) = p_2 \quad (F_T - \text{непрерывна})$$

$$F_T - \text{не непр: } j_1(\theta) = \sup \{t: F_T(t, \theta) \leq p_1\}$$

$$j_2(\theta) = \inf \{t: F_T(t, \theta) \geq p_2\}$$

$$j_1(\theta) \leq j_2(\theta)$$

$$\Rightarrow P_\theta(j_1(\theta) \leq T(X) \leq j_2(\theta)) \geq p_2 - p_1$$

$$X = (X_1, \dots, X_n) \quad X_i \sim N(\theta, 1)$$

$$T(X) = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i; \quad \bar{X} \sim (\theta; \frac{1}{n})$$

$$\Rightarrow P\left(\bar{X} - \frac{u_{p_2}}{\sqrt{n}} \leq \theta \leq \bar{X} - \frac{u_{p_1}}{\sqrt{n}}\right) = p_2 - p_1$$

~~Товарищ! Теорию по этому вопросу
знаю, но не могу доказать
привожу алгоритм решения задачи~~

(63) билет

Доверительный интервал для

математического

дисперсии

1) σ -известно $\Rightarrow$ нормальное1) μ -известно $\Rightarrow \chi^2$ распр.

$$\bar{X} - \frac{\sigma \Phi^{-1}(\frac{1+p}{2})}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma \Phi^{-1}(\frac{1+p}{2})}{\sqrt{n}}$$

$$a) \text{ критерий } \frac{1}{g_2} \sum (X_i - \mu)^2 \leq \sigma^2 \leq \frac{1}{g_1} \sum (X_i - \mu)^2$$

$$\text{ищем } \inf_{(g_1, g_2)} \int_{g_1}^{g_2} k_n(x) dx = p$$

2) σ -не известно $\Rightarrow$ Стьюдента

$$b) \text{ центральные } g_1 = \chi^2_{1-p, n} \quad g_2 = \chi^2_{p, n}$$

$$\bar{X} - \frac{t_{1-p, n-1} S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{t_{p, n-1} S}{\sqrt{n}}$$

2) μ не известно

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-p, n-1}} \right) \leq \sigma^2 \leq \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{p, n-1}} \right)$$

63) Основные понятия проверки статистических гипотез.

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \mathcal{P})$$

$$\text{гипотеза } H_0: \mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}$$

$$X = (X_1, \dots, X_n)$$

$$X \in \mathcal{K} \xRightarrow{\text{критерий}} H_0 \text{ не сов. с гипотезой}$$

$$X \notin \mathcal{K} \Rightarrow H_0 \text{ согласен с гипотезой}$$

Если $\mathcal{P}_0$ содержит 1 элемент - гипотеза простая, иначе - сложная.

$$\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \{0, 1\}$$

$\varphi(X)$ - вероятностная отвергн. гипотезы

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1, & X \in \mathcal{K} \\ 0, & X \notin \mathcal{K} \end{cases}$$

Статистика, принимающая значение в $\{0, 1\}$ по-се критерием.

64) Критерий согласия Колмогорова

$$X = (X_1, \dots, X_n)$$

$$X_i \sim F(x)$$

$$H_0: F = F_0$$

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}(X_i \leq x)$$

$$D_n^0 = \sup_x |F_0(x) - F_n(x)|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_0(\sqrt{n} D_n^0 < x) = K(x)$$

$$\Rightarrow \text{кого выбрать } K: D_n^0 > K \Rightarrow H_0$$

$$D_n^0 \leq K \Rightarrow H_0$$

$$K_n(K_n(\alpha)) = 1 - \alpha$$

$$P_0(\sqrt{n} D_n^0 > K_n(\alpha)) = \alpha$$

$$K = K_n(\alpha) / \sqrt{n}$$

65) Критерий χ^2

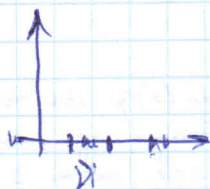
$$p_{\beta, \lambda}(x) = \frac{\beta^\lambda}{\Gamma(\lambda)} e^{-\lambda x} x^{\lambda-1}, x > 0; \beta = \frac{n}{2}; \lambda = \frac{k}{2} - \chi^2 \text{ распределение с } k \text{ степенями свободы}$$

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_n \text{ - Н.р.с.в. } Y_i \sim N(0, 1) \quad \eta = Y_1^2 + \dots + Y_n^2$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(Y_i - n p_i)^2}{n p_i^0}; p_i^0 = P_0(X_i \in B_i) \quad H_0: Y_i = B_i(n, p_i^0)$$

$$\chi^2 > m \Rightarrow H_0; \chi^2 \leq m \Rightarrow H_0 \quad m - ? \text{ теорема Пирсона}$$

$$P_0(X < x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \chi_{n-1}^2(x) \Rightarrow (\chi_{n+1}^2(x) = 1) \Rightarrow \text{квантили } m = \chi_k^2. \text{ Если } \chi^2 \approx 0 \text{ данные согласованы.}$$



Решающее правило, не зависящее от L ,
будет называться байесовским.

$$Q \rightarrow \bar{Q} \text{ if } p(Q) > p(\bar{Q})$$

$$p(Q) = \frac{1}{2}$$

$$X \in \mathcal{X} \Rightarrow p(X) = \frac{1}{2}$$

$$p(X) = \frac{1}{2}$$

$$p(X) = \frac{1}{2}$$

$$p(X) = \frac{1}{2}$$

$$p(X) = \frac{1}{2}$$

$$p(X) = \frac{1}{2}$$

$$p(X) = \frac{1}{2}$$

$$p(X) = \frac{1}{2}$$

$$p(X) = \frac{1}{2}$$

$$p(X) = \frac{1}{2}$$

$$p(X) = \frac{1}{2}$$

$$p(X) = \frac{1}{2}$$

$$p(X) = \frac{1}{2}$$

$$p(X) = \frac{1}{2}$$

$$p(X) = \frac{1}{2}$$

$$p(X) = \frac{1}{2}$$

$$p(X) = \frac{1}{2}$$

66

Байесовский метод различение 2-х
простых гипотез.

$$H_0: \theta = \theta_0 \quad \theta < \theta_2$$

$$H_1: \theta \neq \theta_0 \quad \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_2$$

$$\varphi(x) \in [0, 1]$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x \in S_{кр} \\ 0 & x \notin S_{кр} \end{cases}$$

	Н ₀ принята	Н ₀ отвергнута
Н ₀ верна	+	ошибка 1-го рода
Н ₀ неверна	ошибка 2-го рода	+

$$\varphi(x) \in [0, 1]$$

1) Байесовский метод

$$y = \begin{cases} 0 & = N \text{ гипотез, которые берутся} \\ 1 & = \text{не берутся} \end{cases}$$

$$z = \begin{cases} 0 & = N \text{ гипотез, которую выбрали} \\ 1 & = \text{не выбрали} \end{cases}$$

$$C_{zy} = \begin{cases} C_{00} \\ C_{01} - \text{потеря, штраф} \\ C_{10} \\ C_{11} \end{cases}$$

$E C_{zy}$ - средние потери хотим мин

$$\omega = P(Y=0) = P(H_0)$$

$$E C_{zy} = C_{00} P(z=0, y=0) + C_{01} P(z=0, y=1) + C_{10} P(z=1, y=0) + C_{11} P(z=1, y=1) =$$

$$= C_{00} P(z=0|y=0) P(y=0) + C_{01} P(z=0|y=1) P(y=1) + C_{10} P(z=1|y=0) P(y=0) + C_{11} P(z=1|y=1) P(y=1)$$

$$= \omega C_{00} E_{H_0}(1 - \varphi(x)) + (1 - \omega) C_{01} E_{H_1}(1 - \varphi(x)) +$$

$$+ \omega C_{10} E_{H_0} \varphi(x) + (1 - \omega) C_{11} E_{H_1} \varphi(x) =$$

$$= \omega C_{00} + (1 - \omega) C_{01} + \omega C_{10} E_{H_0} \varphi(x) - \omega C_{00} E_{H_0} \varphi(x)$$

$$+ (1 - \omega) (C_{11} - C_{01}) E_{H_1} \varphi(x) \quad \ominus$$

$$E_{H_1} \varphi(x) = \int_{R^n} \varphi(x) p(x, \theta_1) d(x)$$

$$\ominus \underbrace{\omega C_{00} + (1 - \omega) C_{01}}_{V_0} + \int_{R^n} \varphi(x) [\omega (C_{10} - C_{00}) p(x, \theta_0) -$$

$$- (1 - \omega) (C_{11} - C_{01}) p(x, \theta_1)] d(x) \Rightarrow \min$$

$$\text{при } \omega (C_{10} - C_{00}) p(x, \theta_0) < (1 - \omega) (C_{11} - C_{01}) p(x, \theta_1)$$

$$\frac{p(x, \theta_0)}{p(x, \theta_1)} < \frac{1 - \omega}{\omega} \frac{C_{11} - C_{01}}{C_{10} - C_{00}}$$

Чтобы правая часть была меньше единицы, нужно, чтобы $C_{11} \geq C_{00}$ и $C_{10} \geq C_{01}$.
 $L = \frac{p_0(x)}{p_1(x)}$ - отношение правдоподобия.

Считаем $\varphi(x)$ нулем там, где поднят полотно, и 1 там, где опущено.

67 Лемма Хеймана-Пирсона.

Лемма: $\forall \alpha \in (0,1) \exists c > 0$ и $\varepsilon \in (0,1)$: φ^* - критерий

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & p(x, \theta_1) > c p(x, \theta_0) \\ \varepsilon & p(x, \theta_1) = c p(x, \theta_0) \\ 0 & p(x, \theta_1) < c p(x, \theta_0) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{оптимальный} \\ \mathbb{E}_{H_0} \varphi^*(x) = \alpha \end{matrix}$$

Опр φ^* - оптимальный критерий если $\mathbb{E}_{H_0} \varphi(x) = \alpha$

$$\text{и } \mathbb{E}_{H_1} \varphi^*(x) = \max \mathbb{E}_{H_1} \varphi(x); \quad \varphi: \mathbb{E}_{H_0} \varphi(x) = \alpha$$

Доказ: Пусть $\varphi(x)$ - любой другой критерий и $\mathbb{E}_{H_0} \varphi(x) = \alpha$
 $\varphi(x) \in (0,1)$

$$S_0 = \{x: p(x, \theta_1) < c p(x, \theta_0)\}$$

$$S_1 = \{x: p(x, \theta_1) > c p(x, \theta_0)\}$$

$$S_2 = \{x: p(x, \theta_1) = c p(x, \theta_0)\}$$

$$\mathbb{E}_{H_1} \varphi^*(x) \geq \mathbb{E}_{H_1} \varphi(x)$$

$$1) x \in S_0: (\varphi(x) - \varphi^*(x)) / p(x, \theta_1) = \varphi(x) p(x, \theta_1) < \\ \varphi(x) - \varphi^*(x) c p(x, \theta_0) \quad \text{т.к. } \varphi^*(x) = 0$$

$$2) x \in S_1: \varphi^*(x) = 1 \quad \varphi(x) \in (0,1)$$

$$\underbrace{(\varphi(x) - \varphi^*(x))}_{\leq 0} \underbrace{p(x, \theta_1)}_{\geq c p(x, \theta_0)} \leq (\varphi(x) - \varphi^*(x)) c p(x, \theta_0)$$

$$3) x \in S_2: (\varphi(x) - \varphi^*(x)) (p(x, \theta_1) - c p(x, \theta_0)) = 0$$

$$\int_{S_0 \cup S_1 \cup S_2} (\varphi(x) - \varphi^*(x)) (p(x, \theta_1) - c p(x, \theta_0)) dx \leq 0$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi(x) - \varphi^*(x)) c p(x, \theta_0) dx - \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi(x) - \varphi^*(x)) c p(x, \theta_1) dx$$

$$\int (\varphi(x) - \varphi^*(x)) p(x, \theta_1) dx \leq \int (\varphi(x) - \varphi^*(x)) c p(x, \theta_0) dx =$$

$$= \int c \varphi(x) p(x, \theta_0) dx - \int c \varphi^*(x) p(x, \theta_0) dx =$$

$$= \underbrace{c \mathbb{E}_{H_0} \varphi(x)}_{\alpha} - \underbrace{c \mathbb{E}_{H_0} \varphi^*(x)}_{\alpha} = 0 \quad \text{нужно.}$$

(68)

Статистический анализ нормальных выборок.
Распределение χ^2 и свойства теоремы Фишера.

$$X = (X_1, \dots, X_n)$$

$$X \sim N(a, b^2)$$

$$a \approx \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

$$b^2 \approx S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$X_i = a + \varepsilon_i$$

$$\varepsilon_i \sim N(0, b^2)$$

$$P\left(\bar{X} - u_{\frac{\gamma}{2}} \frac{b}{\sqrt{n}} \leq a \leq \bar{X} + u_{\frac{\gamma}{2}} \frac{b}{\sqrt{n}}\right) = \gamma \rightarrow 1$$

$$\Phi(u_2) = 2$$

Доверительные интервалы

$$\text{с вер-ю } \gamma: \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - a}{b} \sim ?$$

$$\text{Критерий } \chi^2: \eta \sim \chi_n^2 \quad p_n(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} \quad x > 0$$

$$\eta = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2; \quad \xi_i \sim N(0, 1) \quad \xi_i \eta - \text{независимы}$$

$$\text{Следствие: } T_n = \frac{\bar{X} - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_n; \quad q_n(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi} \Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{(1 + \frac{x^2}{n})^{\frac{n+1}{2}}}$$

Теорема Фишера: $X_1, \dots, X_n$ — н.о.р.в. $X_i \sim N(a, b^2)$

$$1) \frac{\bar{X} - a}{b} \sqrt{n} \sim N(0, 1)$$

$$2) \frac{nS^2}{b^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

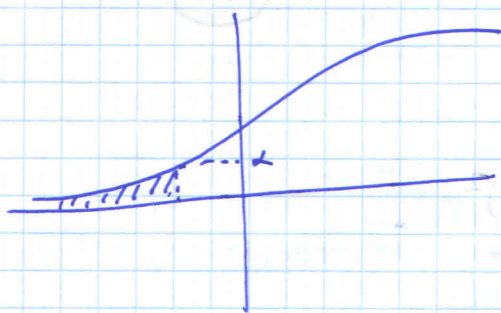
$$3) \bar{X} \text{ и } S^2 \text{ независимы}$$

$$(x) \uparrow \leftarrow (x) \downarrow$$

$$(x) \uparrow b(x) \uparrow \leftarrow (x) \uparrow b(x) \uparrow$$

$$(x) \uparrow \exists \leftarrow (x) \uparrow \exists$$

$$P(X < X_2) = \alpha$$



Мат. ожидание: $\arg \min_a E(x-a)^2 = EX$

Медиана: $\arg \min E|x-a| = \text{med } X$

Интерквартильный размах.

$X_1, \dots, X_n$

$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2$ — одна мера разброса

$|X_{(1)} - X_{(n)}|$ — другая мера разброса

$|K_{0,05} - K_{0,95}|$ — интерквартильный размах

$$\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \varphi_{S_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \approx$$

$$\approx \left(1 - i \frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \sim e^{it\mu}$$

$$F_n(x) \rightarrow F(x)$$

$$\int f(x) dF_n(x) \rightarrow \int f(x) dF(x)$$

$$E f(X_n) \rightarrow E f(X)$$

$$P(|X_n - m| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{|X_n - m|}{\varepsilon} =$$

$$= E \left[1 - \frac{|X_n - m|}{\varepsilon} \right]$$

(68) $H_0: \theta = \theta_0$ $\bar{X} \sim N(\theta, \frac{\sigma^2}{n})$

$$P\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta)}{\sigma}\right| > \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \left| \begin{array}{l} \sqrt{n}(\bar{X} - \theta) \sim \\ \sigma \sim N(0, 1) \end{array} \right.$$

Менее удобно E , но не D

$$S^2 = \dots$$

$$\Gamma(x, \lambda): \frac{\lambda^x e^{-\lambda x}}{\Gamma(x)}$$

$X_1, \dots, X_n$ — к.о.р.с.в. $N(0, 1)$

$$T_1 = X_1^2 + \dots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$$

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - m)^2$$

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{(X_i - m)}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n)$$

Распределение Стьюдента

$$\frac{\bar{X} - m}{\sqrt{T_n/n}}, \text{ где } T_n = X_1^2 + \dots + X_n^2$$